



## SÈRIE 1

1.

- a) Sigui  $x$ , el nombre de vegades que s'aplica el descompte de 5 €. La funció que dona els ingressos per la venda de bitllets és el producte entre el preu del bitllet i el nombre de bitllets venuts:

$$I(x) = (500 - 5x) \cdot (180 + 2x) = -10x^2 + 100x + 90\,000$$

- b) Per trobar el màxim d'ingressos, derivem la funció  $I(x)$ :

$$I'(x) = -20x + 100.$$

Igualem la deriva a zero i veiem que hi ha un extrem relatiu quan  $x = 5$ . Veiem que es tracta d'un màxim, perquè la derivada és positiva per a  $x < 5$  i és negativa per a  $x > 5$ .

Per tant, el preu del bitllet per maximitzar els ingressos ha de ser de  $500 - 5 \cdot 5 = 475$  €. I, amb aquest preu, els ingressos de la companyia per la venda de bitllets seran de  $I(x) = 475 \cdot 190 = 90\,250$  €.

Criteris de correcció:

a) Obtenció de la funció que dona el preu del bitllet en funció de  $x$ : 0,25 punts.

Obtenció de la funció que dona el nombre de passatgers en funció de  $x$ : 0,25 punts.

Obtenció de la funció que dona els ingressos en funció de  $x$ : 0,5 punts.

b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 punts. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Càlcul del preu del bitllet: 0,25 punts. Obtenció dels ingressos màxims: 0,25 punts.



2.

- a) Cal fer el producte de matrius següent:

$$\begin{pmatrix} 0,15 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,10 & 0 \\ 0,05 & 0,60 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 59 \\ 71 \end{pmatrix}$$

Per tant, per al curs vinent cal reservar 15 places de nivell principiant, 59 de nivell intermedi i 71 de nivell avançat.

- b) Cal resoldre el sistema següent:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 51 \end{pmatrix}$$

Es pot fer per diversos mètodes, per exemple pel mètode de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & | & 49 \\ 0,3 & 0,6 & | & 51 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 4 & | & 490 \\ 3 & 6 & | & 510 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 15 & 12 & | & 1470 \\ 15 & 30 & | & 2550 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 15 & 12 & | & 1470 \\ 0 & 18 & | & 1080 \end{pmatrix}$$

I, per tant,  $18y = 1080$ , és a dir,  $y = 60$  i  $15x + 12 \cdot 60 = 1470$ , d'on s'obté que  $15x = 750$ , és a dir,  $x = 50$ . Així doncs, actualment hi ha 50 alumnes matriculats en l'horari de matí i 60 en l'horari de tarda.

Criteris de correcció:

a) Plantejament: 0,5 punts. Producte de matrius: 0,5 punts. Interpretació del resultat: 0,25 punts.

b) Plantejament: 0,5 punts. Resolució: 0,5 punts. Solució final: 0,25 punts.



3.

- a) Si anomenem respectivament  $x$ ,  $y$  i  $z$  els resultats de cadascuna de les tres proves, podem plantejar el sistema següent:

$$\begin{cases} \frac{x+y+z}{3} = 6 \\ z = \frac{x+y}{2} \end{cases}$$

Escrivint el sistema sense fraccions, i aplicant el mètode de Gauss obtenim:

$$\begin{cases} x+y+z = 18 \\ -x-y+2z = 0 \end{cases} \xrightarrow{f_1+f_2} \begin{cases} x+y+z = 18 \\ 3z = 18 \end{cases}$$

Obtenim, per tant, el valor de  $z = 6$ . Així doncs, la nota de la tercera prova ha estat un 6.

- b) Afegint la nova informació, el sistema queda:

$$\begin{cases} \frac{x+y+z}{3} = 6 \\ z = \frac{x+y}{2} \\ \frac{y+z}{2} = 7 \end{cases}$$

Escrivint el sistema sense fraccions i aplicant el mètode de Gauss, ens queda:

$$\begin{cases} x+y+z = 18 \\ -x-y+2z = 0 \\ y+z = 14 \end{cases} \xrightarrow{f_1+f_2} \begin{cases} x+y+z = 18 \\ 3z = 18 \\ y+z = 14 \end{cases}$$

Com que tenim un sistema esglaonat, podem resoldre'l fàcilment i obtenim  $z = 6$ ,  $y = 8$  i  $x = 4$ .

Així doncs, ha obtingut un 4 a la primera prova, un 8 a la segona i un 6 a la tercera.

Criteris de correcció:

a) Escriure el sistema: 0,25 punts per cada una de les dues equacions. Procediment de resolució: 0,5 punts. Trobar el valor correcte de  $z$ : 0,25 punts.

b) Escriure l'equació addicional: 0,25 punts. Procediment de resolució: 0,5 punts. Trobar els valors correctes de  $x$  i  $y$ : 0,5 punts.

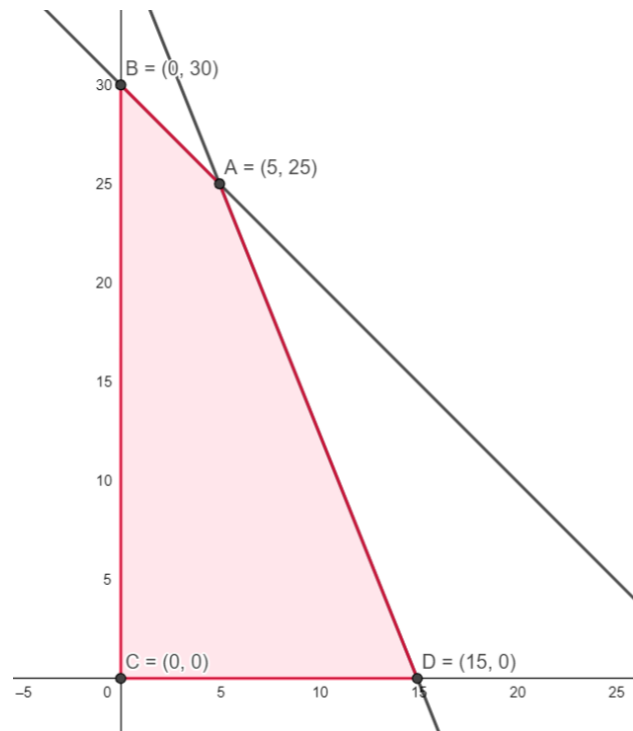


4.

- a) Denotem per  $x$  el nombre de barques que faran bateigs de submarinisme i per  $y$  el nombre de barques que faran excursions per la costa per banyar-se en cales. Les restriccions provenen de la limitació en el nombre d'instructors i d'embarcacions. El sistema d'inequacions determinat per les restriccions és:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5x + 2y \leq 75 \\ x + y \leq 30 \end{cases}$$

La regió factible serà:



I la funció objectiu és:  $F(x, y) = 60 \cdot 10x + 18 \cdot 25y = 600x + 450y$

- b) Els vèrtexs de la regió factible són:  $A = (5,25)$ ,  $B = (0,30)$ ,  $C = (0,0)$  i  $D = (15,0)$ . Avaluant la funció objectiu als quatre vèrtexs s'obté:

$$F(A) = 14\ 250, \quad F(B) = 13\ 500, \quad F(C) = 0 \quad \text{i} \quad F(D) = 9\ 000.$$

Deduïm, per tant, que per obtenir el màxim d'ingressos caldria fer 5 bateigs de submarinisme i 25 excursions per la costa. Amb aquestes sortides ingressarien 14 250 euros diaris.



Criteris de correcció:

a) Càlcul de les restriccions: 0,5 punts. Dibuix de la regió factible: 0,5 punts. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 punts.

b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 punts. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,5 punts. Obtenció del màxim d'ingressos: 0,25 punts.



5.

a) Comencem calculant els quilos de menjar que es van gastar els dos dilluns:

$$f(1) = 10 \left( -\frac{1^3}{8} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} - \frac{9 \cdot 1}{2} + 10 \right) = \frac{550}{8} = \frac{275}{4} = 68,75 \text{ kg}$$

$$f(8) = 10 \left( -\frac{8^3}{8} + \frac{3 \cdot 8^2}{2} - \frac{9 \cdot 8}{2} + 10 \right) = 60 \text{ kg}$$

Ara hem de trobar quin dia es van gastar 100 kg de menjar:

$$10 \left( -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10 \right) = 100 \rightarrow -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10 = 10$$

$$\rightarrow -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} = 0 \rightarrow -t^3 + 12t^2 - 36t = 0$$

$$\rightarrow -t(t^2 - 12t + 36) = 0 \rightarrow -t(t - 6)^2 = 0 \rightarrow t = 0 \text{ i } t = 6$$

Com que  $t = 0$  no és del domini d'aquesta funció, la solució és  $t = 6$ , és a dir, el dissabte es van gastar 100 kg de menjar.

b) Per buscar els extrems relatius de  $f(t)$ , cal igualar a zero la derivada:

$$f'(t) = 10 \left( -\frac{3t^2}{8} + 3t - \frac{9}{2} \right) = 0 \rightarrow 3t^2 - 24t + 36 = 0 \rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \rightarrow$$

$$(t - 6) \cdot (t - 2) = 0 \rightarrow t = 6 \text{ i } t = 2$$

Ara cal comprovar quin és el màxim i quin és el mínim:

	1	(1, 2)	2	(2, 6)	6	(6, 8)	8
$f'(t)$		-	0	+	0	-	
$f(t)$	68,75 kg	Decreix.	Mínim (2, 60)	Creix.	Màxim (6, 100)	Decreix.	60 kg

$$f(2) = 10 \left( -\frac{2^3}{8} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} - \frac{9 \cdot 2}{2} + 10 \right) = 60 \text{ kg.}$$

Els dies que la despesa en menjar va ser més petita són el dia 2 (dimarts) i el dia 8 (dilluns de l'altra setmana), amb 60 kg, i el dia que es va gastar més menjar va ser el dia 6 (dissabte), amb 100 kg.



Criteris de correcció:

a) 0,25 punts per cada imatge i 0,5 punts per l'antiimatge.

b) 0,5 punts per la derivada; 0,25 punts pel càlcul dels extrems relatius; 0,5 punts per estudiar de quin tipus són els extrems relatius i 0,25 punts per observar que en  $t = 8$  també s'assoleix el mínim.



6.

a) Sabem que  $2y + x = 64$ . Per tant, aïllant, obtenim que:  $y = \frac{64-x}{2}$

D'altra banda, si  $x = 28$ , substituïnt obtenim que:  $y = \frac{64-28}{2} = 18$  cm

Per tant, la longitud ideal de la contrapetja és de 18 cm.

b) Les inequacions que estableix la normativa són les següents:

$$\begin{cases} x \geq 28 \\ 13 \leq y \leq 18,5 \\ 54 \leq 2y + x \leq 70 \end{cases}$$

Així doncs, si  $x = 40$ , es compleix la primera condició. Pel que fa a la tercera, d'una banda tenim que  $2y + 40 \leq 70$ , que ens dona que  $y \leq 15$ . D'altra banda, cal que  $2y + 40 \geq 54$ , que ens dona que  $y \geq 7$ .

També sabem que cal que  $13 \leq y \leq 18,5$ . Per tant, ajuntant totes les condicions, sabem que cal que la contrapetja estigui entre 13 i 15 cm.

Criteris de correcció:

a) Escriure la condició en forma d'equació: 0,25 punts. Obtenir  $y$  en funció de  $x$ : 0, 5 punts. Trobar la longitud de la contrapetja: 0,25 punts.

b) Obtenció de les inequacions: 0,25 punts cadascuna. Treballar bé les desigualtats en el cas concret que  $x = 40$ : 0, 5 punts. Resultat final: 0,25 punts.