Com a criteri general, les respostes s'han de justificar. Cada apartat de cada exercici té un punt com a puntuació màxima. El plantejament correcte de la resposta es puntua amb 0,5 punts. S'han de posar les unitats correctes a les solucions numèriques; si no són les correctes o no s'han posat, es restaran 0,25 punts. Les errades en els factors de les fórmules emprades també es penalitzaran amb 0,25 punts.

OPCIÓ A

1. Un satèl·lit artificial es troba en una òrbita circular al voltant de la Terra a $1\,000$ km per damunt de la superfície. Sabent que $R_\mathrm{T} = 6\,370$ km i $M_\mathrm{T} = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg, calculau:

   a) La velocitat lineal del satèl·lit.

   b) L'energia per unitat de massa que s'ha necessitat per posar el satèl·lit en aquesta òrbita des de la superfície terrestre.

---

a) El radi de l'òrbita és $r = R_\mathrm{T} + 1\,000 \text{ km} = 7{,}37 \times 10^6$ m. De l'equació que resulta d'igualar les acceleracions centrípeta i gravitatòria podem aïllar v:

$$\frac{v^2}{r} = G\frac{M_\mathrm{T}}{r^2} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{G\frac{M_\mathrm{T}}{r}} = 7{,}36 \text{ km/s}$$

b) Negligint l'energia cinètica deguda a la rotació de la Terra, l'energia d'un satel·lit de massa m a la superfície terrestre és:

$$E_{sup} = E_p = -G\frac{M_\mathrm{T}\, m}{R_\mathrm{T}}$$

L'energia del satèl·lit en l'òrbita és:

$$E_{orb} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_\mathrm{T} m}{r} = \frac{1}{2}G\frac{M_\mathrm{T} m}{r} - G\frac{M_\mathrm{T} m}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{M_\mathrm{T}\, m}{r}$$

Per tant, l'increment d'energia $\Delta E = E_{orb} - E_{sup}$ per unitat de massa serà:

$$\frac{\Delta E}{m} = G M_\mathrm{T}\left(\frac{1}{R_\mathrm{T}} - \frac{1}{2r}\right) = 3{,}56 \times 10^7 \text{ J/kg}$$

---

2. Dues càrregues elèctriques de $2{,}4$ nC i $1{,}2$ nC es mantenen separades una distància $d = 1{,}7$ cm.

   a) En quin punt de la recta que uneix les càrregues s'anul·la el camp elèctric?

   b) Quina energia cinètica màxima pot adquirir un protó que es deixa anar lliurement des del punt anterior?

---

a) Anomenam les càrregues $Q_1 = 2{,}4$ nC i $Q_2 = 1{,}2$ nC i observam que $Q_1 = 2\,Q_2$. El punt on s'anul·la el camp elèctric ha de ser un punt situat entre les dues càrregues: es trobarà a una distància x de Q_1 i a una distància $d - x$ de Q_2. La condició que els camps creats per Q_1 i Q_2 han de tenir el mateix mòdul implica:

$$k\frac{Q_1}{x^2} = k\frac{Q_2}{(d-x)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{x^2} = \frac{1}{(d-x)^2}$$

D'on resulta l'equació $x^2 - 4dx + 2d^2 = 0$, les solucions de la qual són $x = (2 \pm \sqrt{2})d$; d'aquestes la solució admissible és:

$$x = (2 - \sqrt{2})\,d = 1{,}0 \text{ cm}$$

El punt on s'anul·la el camp es troba a $1{,}0$ cm de Q_1 i a $0{,}7$ cm de Q_2.

b) L'energia cinètica que es demana serà igual a l'energia potencial del protó en aquest punt. La càrrega elèctrica del protó és la càrrega elemental $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C. L'energia potencial inicial del protó, i per tant l'energia cinètica màxima que pot assolir, és:

$$U = e\,V = e\left(k\frac{Q_1}{x} + k\frac{Q_2}{d-x}\right) = 3{,}7 \text{ keV} = 5{,}93 \times 10^{-16} \text{ J}$$

---

3. Una partícula de massa $m = 25{,}0$ g realitza un moviment harmònic simple per al qual se satisfà la relació $a = -16\,x$, on x indica l'elongació de la partícula en metres i a la seva acceleració en $\mathrm{m/s^2}$. Sabent que l'amplitud és de $8{,}0$ m, calculau:

a) La freqüència i el valor màxim de la velocitat.

b) L'energia mecànica total d'aquesta partícula mentre descriu aquest moviment.

---

a) En els moviments harmònics simples l'elongació, la velocitat i l'acceleració venen donades per:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta) \quad \rightarrow \quad v(t) = A\omega\cos(\omega t + \delta) \quad \rightarrow \quad a(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \delta)$$

De la condició $a = -16\,x$ deduïm $-A\omega^2 = -16A$. Per tant $\omega = 2\pi\nu = 4$ s^{-1} i la freqüència valdrà $\nu = 0{,}64$ Hz. El valor màxim de la velocitat és $v_{max} = A\omega = 32$ m/s.

b) L'energia mecànica total en tot moment és la suma de les energies cinètica i potencial, $E_T = E_c + E_p$. Per tant, $E_T = E_{c,max} = \frac{1}{2}m\,v_{max}^2 = 12{,}8$ J, ja que quan $v = v_{max}$ l'energia potencial és zero.

---

4. Un raig de llum blanca incideix des de l'aire sobre una làmina de vidre formant un angle de $30°$ amb la perpendicular.

   a) Quin angle formaran entre si, a l'interior del vidre, els raigs vermell i blau, components de la llum blanca, si els valors dels índexs de refracció del vidre per a aquests colors són $n_v = 1{,}612$ i $n_b = 1{,}671$?

   b) Quins seran els valors de la freqüència i de la longitud d'ona corresponents a cada una d'aquestes radiacions en el vidre si les longituds d'ona en el buit són, respectivament, $\lambda_{0v} = 656{,}3$ nm i $\lambda_{0b} = 486{,}1$ nm?

---

a) D'acord amb la llei de Snell, l'angle θ_r que formarà la llum refractada dins del vidre serà:

$$n_i \sin\theta_i = n_r \sin\theta_r \quad \to \quad \theta_r = \arcsin\left(\frac{\sin\theta_i}{n_i}\right)$$

La diferència entre els angles que formaran els raigs vermell i blau refractats dins del vidre serà:

$$\Delta\theta_r = \arcsin\left(\frac{\sin 30°}{1{,}612}\right) - \arcsin\left(\frac{\sin 30°}{1,671}\right) = 18{,}1° - 17{,}4° = 0{,}7°$$

b) Per a cada radiació se satisfà que $c = \lambda\nu$ on c és la velocitat de la radiació, λ la longitud d'ona i ν la freqüència. L'índex de refracció és $n = c_0/c$, on c_0 és la velocitat de la radiació en el buit i c la velocitat de la radiació en aquest medi. c_0 és la mateixa per a totes les radiacions electromagnètiques.

Les freqüències són pròpies de cada radiació i, per tant, les mateixes en tots els medis. Les freqüències de les radiacions vermella i blava són:

$$\nu_v = \tfrac{c_0}{\lambda_{0,v}} = 457\times10^{12}\ \mathrm{Hz}$$
$$\nu_b = \tfrac{c_0}{\lambda_{0,b}} = 617\times10^{12}\ \mathrm{Hz}$$

La relació entre la longitud d'ona λ en un medi d'índex de refracció n i la longitud d'ona de la mateixa radiació en el buit λ_0 és:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c_0}{n\,\nu} = \frac{\lambda_0}{n}$$

Les longituds d'ona de les radiacions vermella i blava en el vidre seran:

$$\lambda_v = \tfrac{\lambda_{0,v}}{n_v} = 407{,}1\ \mathrm{nm}$$
$$\lambda_b = \tfrac{\lambda_{0,b}}{n_b} = 290{,}9\ \mathrm{nm}$$

---

5. a) Explicau el concepte de *període de semidesintegració*.

   b) El triti $^3\mathrm{H}$ s'utilitza per a la datació de vins. Té un període de semidesintegració de $12{,}33\ \mathrm{anys}$. Calculau quant de temps ha estat envasat un vi si la seva activitat actual és un $10\ \%$ de la inicial.

---

a) Període de semidesintegració, $t_{1/2}$, és el temps que ha de passar per tal que l'activitat d'una mostra radioactiva es redueixi a la meitat.
La relació entre el període de semidesintegració i la constant de desintegració λ és:

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

b) L'activitat d'una mostra radioactiva ve donada per:

$$A(t) = A_0\, e^{-\lambda t}$$

on A_0 és l'activitat inicial. $A(t)$ serà un $10\ \%$ de A_0 quan $e^{-\lambda t} = 0{,}1$, d'on podem aïllar t:

$$-\lambda t = \ln 0{,}1 \quad \rightarrow \quad t = -\frac{\ln 0{,}1}{\lambda} = -t_{1/2}\frac{\ln 0{,}1}{\ln 2} = 40{,}96\ \mathrm{anys}.$$

OPCIÓ B

1. a) A quina altitud per sobre de la superfície terrestre la intensitat del camp gravitatori és el $20\ \%$ del valor a la superfície?

   b) Quin període tindria un satèl·lit que orbitàs la Terra a l'altitud determinada a l'apartat anterior?
   (Radi de la Terra $R_\mathrm{T} = 6\,370\ \mathrm{km}$)

---

a) Les intensitats del camp gravitatori a la superfície terrestre, g_0, i a una altitud h, g, venen donades per:

$$g_0 = G\frac{M_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}^2} \qquad g = G\frac{M_\mathrm{T}}{(R_\mathrm{T}+h)^2}$$

La condició $g = 0{,}2\,g_0$ ens determina l'altitud cercada. Imposant aquesta condició a g/g_0 s'obté:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{R_\mathrm{T}^2}{(R_\mathrm{T}+h)^2} = \frac{1}{(1+h/R_\mathrm{T})^2} = \frac{1}{5}$$

De la darrera igualtat podem aïllar h :

$$h = (\sqrt{5}-1)R_\mathrm{T} = 7\,870\ \mathrm{km}$$

b) El període d'un satel·lit que orbita amb aquest radi $r = R_\mathrm{T} + h = 14\,240\ \mathrm{km}$ és:

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

on v és la velocitat lineal del satel·lit, que deduïm igualant les acceleracions gravitacional i centrípeta:

$$\frac{v^2}{r} = G\frac{M_\mathrm{T}}{r^2} \quad \to \quad v = \sqrt{\frac{GM_\mathrm{T}}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 R_\mathrm{T}^2}{r}}$$

Substituint aquesta expressió a la del període obtenim:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{g_0 R_\mathrm{T}^2}} = 1{,}69\times 10^4\ \mathrm{s} = 4{,}7\ \mathrm{hores}$$

---

2. En un model simple de clorur sòdic podem considerar els ions Cl^- i Na^+ com a càrregues puntuals de valors $-1{,}6\times10^{-19}\ \mathrm{C}$ i $1{,}6\times10^{-19}\ \mathrm{C}$, respectivament. Aquestes càrregues es troben separades una distància $d = 1{,}2\times10^{-10}\ \mathrm{m}$. Calculau:

   a) La diferència de potencial entre els punts a i b situats tal com s'indica a la figura 1.

   b) L'energia necessària per dissociar el clorur sòdic segons aquest model.

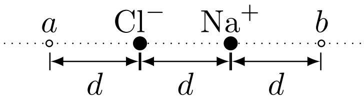

Figura 1: Esquema simple de NaCl i situació dels punts a i b.

a) La càrrega elèctrica, en valor absolut, de cada un dels ions del clorur sòdic és la càrrega elemental e. El potencial en cada un dels punts a i b és:

$$V_a = V_{\mathrm{Na}} + V_{\mathrm{Cl}} = k\frac{e}{2d} - k\frac{e}{d} = -k\frac{e}{2d}$$
$$V_b = V_{\mathrm{Na}} + V_{\mathrm{Cl}} = k\frac{e}{d} - k\frac{e}{2d} = k\frac{e}{2d}$$

La diferència de potencial $\Delta V_{ab} = V_a - V_b$ serà:

$$\Delta V_{ab} = V_a - V_b = -k\frac{e}{2d} - k\frac{e}{2d} = -k\frac{e}{d} = -12{,}0 \text{ V}$$

b) Per dissociar el clorur sòdic s'ha d'aportar una energia E igual a l'energia potencial d'un dels ions deguda a l'altre ió, $e\,V_i$,

$$E = -U = e\,V_i = e \cdot k\frac{e}{d} = 12{,}0 \text{ eV} = 1{,}9 \times 10^{-18} \text{ J.}$$

---

3. En una regió de l'espai hi ha un camp magnètic uniforme $\mathbf{B}$. Amb l'ajuda d'un diagrama en el qual aparegui representat $\mathbf{B}$, indicau la força (mòdul, direcció i sentit) que actua sobre una càrrega Q en els casos següents:
   a) La càrrega és positiva i es mou en la direcció del camp però en sentit contrari.
   b) La càrrega és negativa i es mou en direcció perpendicular a $\mathbf{B}$.

La força magnètica $\mathbf{F}_m$ sobre una càrrega Q que es mou amb velocitat $\mathbf{v}$ dins un camp magnètic $\mathbf{B}$ és $\mathbf{F}_m = Q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

a) Si la velocitat i el camp magnètic tenen la mateixa direcció el seu producte vectorial és zero i, per tant, $\mathbf{F_m} = 0$.

b) El mòdul de la força magnètica serà $|\mathbf{F}_m| = F_m = QvB\sin\theta$, on θ és l'angle que formen $\mathbf{v}$ i $\mathbf{B}$. Si $\mathbf{v}$ i $\mathbf{B}$ són perpendiculars, $F_m = QvB$.
(Cal incloure figura amb indicació de la direcció i el sentit de la força per a $Q < 0$)

---

4. Una partícula de massa $2{,}0\ \mathrm{kg}$ efectua un moviment harmònic simple d'amplitud $1{,}0\ \mathrm{cm}$. L'elongació i la velocitat de la partícula en l'instant inicial valen $0{,}5\ \mathrm{cm}$ i $1{,}0\ \mathrm{cm/s}$, respectivament.

   a) Determinau la fase inicial i la freqüència d'aquest moviment.

   b) Calculau l'energia total del moviment, així com l'energia cinètica i l'energia potencial a l'instant $t = 1{,}4\ \mathrm{s}$.

---

a) L'elongació i la velocitat per a un moviment harmònic simple venen donades per

$$x(t) = A\sin(\omega\, t + \varphi) \qquad v(t) = A\cos(\omega\, t + \varphi)$$

Imposant les condicions inicials obtenim:

$$x(0) = A\sin\varphi \quad \rightarrow \quad \varphi = \arcsin(x(0)/A) = \arcsin 0{,}5 = \pi/6\ \mathrm{rad} = 30^\circ$$

$$v(0) = A\omega\cos\varphi \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{v(0)}{A\cos(\pi/6)} = \frac{1}{\cos(\pi/6)} = 2/\sqrt{3}\ \mathrm{s}^{-1} = 1{,}15\ \mathrm{s}^{-1}$$

La freqüència ν serà

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\ \mathrm{Hz} = 0{,}18\ \mathrm{Hz}$$

b) L'energia cinètica és $E_c(t) = \frac{1}{2}m\, v^2(t)$. A $t = 1{,}4\ \mathrm{s}$ serà:

$$E_c = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega\, t + \varphi)$$

Substituint valors s'obté $E_c = 3{,}88\times 10^{-5}\ \mathrm{J}$.

L'energia potencial $E_p = \frac{1}{2}k\, x^2$ on $k = \omega^2\, m$ serà

$$E_p = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega\, t + \varphi)$$

Substituint valors resulta $E_p = 9{,}46\times 10^{-5}\ \mathrm{J}$.

Comprovam que l'energia total $E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = 1{,}33\times 10^{-4}$ J coincideix amb la suma dels resultats anteriors.

---

5. Quan incideix llum de longitud d'ona $\lambda = 621{,}5\ \mathrm{nm}$ sobre una fotocèl·lula, aquesta emet electrons amb una energia cinètica de $0{,}14\ \mathrm{eV}$. Calculau:

   a) El treball d'extracció de la fotocèl·lula.

   b) La freqüència llindar.
   (Constant de Planck $h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\,s} = 4{,}135 \times 10^{-15}\ \mathrm{eV\,s}$)

---

a) L'equació d'Einstein ens dona l'energia dels fotons incidents, E_f, en funció de la seva longitud d'ona λ o de la freqüència ν:

$$E_f = h\nu = \frac{h\,c}{\lambda}$$

El treball d'extracció, W_0, és la diferència entre l'energia dels fotons i l'energia cinètica dels electrons emesos,

$$W_0 = \frac{h\,c}{\lambda} - E_c = 1{,}86\ \mathrm{eV} = 2{,}97 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

b) La freqüència llindar, ν_0, es correspon amb la dels fotons que tenen una energia igual al treball d'extracció. Per tant:

$$\nu_0 = \frac{W_0}{h} = 448{,}6 \times 10^{12}\ \mathrm{Hz}$$

Aquesta freqüència es correspon amb una longitud d'ona de $668{,}3\ \mathrm{nm}$.
