OPCIÓ A

1

Dades $m_s = 1485$ kg, $E_T = -3{,}64\ 10^{10}$ J, $M_T = 5{,}972\ 10^{24}$ kg. Órbita circular.

a) En una órbita circular de radi R l'energia potencial és

$$E_p = -\frac{G\,M}{R}.$$

L'acceleració a causa de la gravetat és igual a l'acceleració centrípeta i d'aquí s'obté la velocitat orbital i la relació entre l'energia cinètica i potencial

$$\frac{v^2}{R} = \frac{G\,M}{R^2} \to E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,\frac{G\,M}{R} \to E_c = -\frac{1}{2}\,E_p.$$

Llavors, l'energia potencial és

$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2}\,E_p \to E_p = 2\,E_T \to \boxed{E_p = -7{,}28\times10^{10}\ \mathrm{J}}$$

b) L'energia cinètica del satèl·lit és $E_c = -E_p/2 = 3{,}64\ 10^{10}$ J. Llavors,

$$v = \sqrt{2\,E_c/m_s} \to \boxed{v = 7{,}00\ \mathrm{km/s}}$$

c) El radi de l'òrbita es pot calcular a partir de l'energia potencial obtinguda a l'apartat a o la velocitat obtiguda a l'apartat b

$$R = -G\,\frac{m_s\,M}{E_p},\quad R = \frac{G\,M}{v^2} \to \boxed{R = 8130\ \mathrm{km}}$$

2

a) Les forces es calculen amb la llei de Coulomb i s'obté

$$\mathbf{F}_{\mathrm{esq}} = (-9{,}39,\ -18{,}78)\ \mathrm{N},\ \mathbf{F}_{\mathrm{drt}} = (9{,}39,\ -18{,}78)\ \mathrm{N}, \to \boxed{\mathrm{F} = 37{,}57\ \mathrm{N}}$$

Els signes corresponen als eixos de coordenades cartesianes habituals.

b) Dada V(centre) = 29.7 kV.

El potencial a la posició inicial P_i de la càrrega val

$$V(P_i) = 2\left(K\,\frac{7\,10^{-9}}{\sqrt{0{,}006^2 + 0{,}003^2}}\right) \to V\,(P_i) = 18{,}78\ \mathrm{kV}$$

El mòdul del treball demanat és

$$|W| = 15\,10^{-6}\,(29{,}7\ \mathrm{kV} - 18{,}78\ \mathrm{kV}) \to \boxed{|W| = 0{,}164\ \mathrm{J}}$$

3

a) Dades: $v = 290$ km/s, $t = 3\ \mu$s, $B = 0.5$ T, $m_p = 1{,}673\times10^{-27}$ kg.

La trajectòria és circular i la força centrípeta és igual a la força magnètica,

$$m_p\,\frac{v^2}{R} = q\,v\,B \to R = \frac{m_p\,v}{q\,B}.$$

El temps que tarda el protó en completar una volta és

$$T = \frac{2\,\pi\,R}{v} \to T = \frac{2\,\pi\,m_p}{q\,B}.$$

La càrrega d'un protó és igual a menys la càrrega d'un electrò, que s'ha de saber. El període 0.1314 μs i el nombre n de voltes completes serà

$$\frac{3\ \mu s}{T} = 22{,}8 \to \boxed{n = 22}$$

b) També completa 10 voltes perquè el període no depèn de la velocitat. $\boxed{n = 10}$

(4)

a) Dades: Propagació cap a l'esquerra, nombre d'ona: 5,2 m^{-1}, freqüència angular: 1,9 rad/s, amplitud: 12 cm, i pertorbació nul·la a l'origen de coordenades a l'instant t = 0.

L'equació d'ones d'una ona que es propaga cap a l'esquerra amb pertorbació nul·la a $x = 0$ i $t = 0$, s'ha d'escriure en la forma $y(x,\ t) = A\sin(k\,x\ +\ \omega\,t)$. Per les dades de l'enunciat: $A = 12$ cm, $k = 5.2\ \mathrm{m}^{-1}$, $\omega = 1.9\ \mathrm{rad/s}$:

$$\boxed{y(x,\ t) = 12\ \mathrm{cm}\sin(5.2\,x\ +\ 1.9\,t)}$$

b) Dades: Velocitat de propagació: 5 m/s cap a la dreta, amplitud: 3 cm, velocitat màxima de vibració de les partícules de l'ona: 6 cm/s, i pertorbació màxima a l'origen de coordenades a t = 0

L'equació d'ones d'una ona que es propaga cap a la dreta amb amplitud de 3 cm i pertorbació màxima a $x = 0$ i $t = 0$, serà $y(x,\ t) = 3\ \mathrm{cm}\ \sin(k\,x\ -\ \omega\,t\ +\pi/2)$.

La velocitat de vibració màxima serveix per determinar la freqüència angular,

$$v_{y,\text{màx}} = A\,\omega = \ 3\ \mathrm{cm}\times\omega = \ 6\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \rightarrow \omega = 2\ \mathrm{rad/s},$$

i la velocitat de propagació serveix per determinar el nombre d'ones

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \ 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \rightarrow k = 0.4\ \mathrm{m}^{-1}.$$

$$\boxed{y(x,\ t) = 3\ \mathrm{cm}\sin(0.4\,x\ -\ 2\,t+\pi/2)}$$

(5) Dades: $n_1 = 1.43,\ n_v = 1.52$

a) Dades: $\theta_1 = 31\,°$. Amb la llei de Snell es determina l'angle refractat

$$1.423\sin(31\,°) = 1.52\sin(\theta_2) \rightarrow \boxed{\theta_2 = \ 29.0\,°}$$

b) Per a l'angle límit de 66°, l'angle de refracció serà de 90°.

$$1.52\sin(66\,°) = n_2\sin(90\,°) \rightarrow \boxed{n_2 = \ 1.39}$$

c) Per a la refracció del raig en la superfície superior del vidre es té

$$1.43\sin(\theta_m) = 1.52\sin(\theta_k).$$

L'angle θ_k és també l'angle d'incidència a la superfície inferior del vidre i si el raig s'ha de reflectir totalment, s'ha de complir

$$1.52\sin(\theta_k) = 1.33\sin(90\,°).$$

Per tant,

$$1.423\sin(\theta_m) = 1.33\sin(90\,°) \rightarrow \boxed{\theta_m\ = 68.4\,°}$$

(6)

a) La radiació de fons de microones i l'efecte Doppler relativista.

b) Canvi observat en la freqüència de la llum procedent d'una font en moviment relatiu respecte a l'observador.

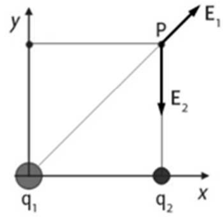
OPCIÓ B

1

a) Dades: $v_1 = 8.30$ km/s, $r_1 = 25\,400$ km, massa de Mart $M = 6,4185 \times 10^{23}$ kg
La velocitat quan la distància a Mart s'hagi reduït a la meitat s'obté amb l'equació de la conservació de l'energia:

$$\frac{1}{2}v_1^2 - G\frac{M}{r_1} = \frac{1}{2}v_2^2 - G\frac{M}{(r_1/2)} \to \boxed{v_2 = 8.50 \text{ km/s}}$$

2 **a)** A la figura es representa el camp elèctric en el punt P a causa de q_1 i q_2.



b) El camp elèctric es calcula amb la llei de Coulomb

$$\mathbf{E}_1 = K\frac{q_1}{(\sqrt{2}\;0.5)^2}\frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \boxed{(63.64,\;63.64)\text{ N/C}}$$

$$\mathbf{E}_2 = K\frac{q_2}{0.5^2}(0,1) = \boxed{(0,\;-108)\text{ N/C}}$$

c) El camp elèctric total és $(63.64, -44.36)$, llavors l'angle del camp amb l'eix x és

$$\alpha = \arctan\left(-\frac{44.36}{63.64}\right) \to \boxed{\alpha = -34.9\,^\circ}$$

d) Dada: $V(A) = 51.82$ V.
El potencial electrostàtic en el punt P a causa de les dues càrregues és

$$V(P) = 9\,10^9\left(\frac{5\,10^{-9}}{\sqrt{2}\;0.5} + \frac{-3\,10^{-9}}{0.5}\right) = 9.64 \text{ V}.$$

El mòdul del treball per dur una càrrega d'1.4 μC del punt A al punt P val

$$|W| = 1.4\,10^{-6}\,(51.82 - 9.64) \to \boxed{|W| = 59.0\;\mu\text{J}}$$

3 Dada: $\mu_0 = 4\pi\,10^{-7}$ N A^{-2}.

a) Els fils s'atrauen perquè els corrents tenen el mateix sentit.

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0\,I_1\,I_2}{2\pi\,d} = \frac{\mu_0\,5\times 8}{2\pi\,(10^{-2}\text{ m})} \to \boxed{\frac{F}{L} = 0.8 \text{ mN/m}}$$

b) La força total sobre el fil central és horitzontal. Amb el signe positiu quan el sentit de la força és cap a la dreta es calcula:

$$\frac{F_T}{L} = -\frac{\mu_0\,5\times 3}{2\pi\,0.0045} + \frac{\mu_0\,3\times 8}{2\pi\,0.0055} \to \boxed{\frac{F}{L} = 0.206 \text{ mN/m}}$$

La força total és horitzontal i cap a la dreta.

c) El fil central ha de seguir amb el corrent cap a dalt perquè la força total s'anul·li.
Usant les distàncies en mil·límetres s'ha de complir

$$\frac{\mu_0\,5\times 3}{2\pi\,x} = \frac{\mu_0\,3\times 8}{2\pi\,(10 - x)} \to \boxed{x = 3.85 \text{ mm}}$$

(4) Dada: $y(x, t) = 18\cos(2\pi x/12 + 4\pi t)$

a) La pertorbació és nul·la a l'orgien de coordenades quan $y(0, t) = 0$,

$$18\cos(4\pi t) = 0 \rightarrow 4\pi t = \pi/2 \rightarrow \boxed{t = (1/8)\,s = 0.125\,s}$$

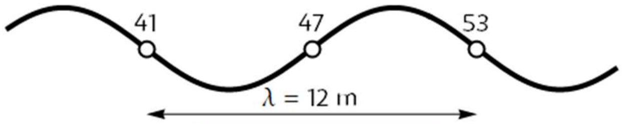
El període de l'ona és 0.5 s perquè apareix a l'equació d'ona en la forma $2\pi t/T$. La pertorbació tornarà ser nul·la a cada múltiple de la meitat del període.

b) La longitud de l'ona és 12 m perquè apareix a l'equació d'ona en la forma $2\pi x/\lambda$.

$$\boxed{\lambda = 12\,m}$$

c) $x(45\text{ m}, 0) = 18\cos(7.5\pi) \rightarrow \boxed{x(45\text{ m}, 0) = 0}$

d) Quan la pertorbació és nul·la a $x = 47$ m, també ho és a $x = 47 \pm \lambda/2$



$$\boxed{x = 41\text{ m},\ x = 53\text{ m}}$$

(5)

a) S'usa el criteri DIN. Dades: $s = -80$ cm, $s' = 120$ cm, $y = 2.1$ cm.

$$M_T = \frac{s'}{s} = \frac{y'}{y} \rightarrow \frac{120}{-80} = \frac{y'}{2.1} \rightarrow \boxed{y' = -3.15\text{ cm}}$$

El signe negatiu indica que la imatge està invertida.

b) La distància focal de la lent es determina amb l'equació de Descartes

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{120} - \frac{1}{-80} = \frac{1}{f} \rightarrow \boxed{f = +48\text{ cm}}$$

(6) Dada: Semivida = 5 ms.

a) L'activitat d'una mostra es redueix a la meitat quan ha passat un temps igual a la semivida: $\boxed{t_a = 5\text{ ms}}$

b) Si l'activitat s'ha reduit a la vuitena part, ha passat un temps igual 3 vegades la semivida: $\boxed{t_b = 15\text{ ms}}$

c) El periode de desintegració és $\lambda = \ln(2)/T_{1/2} = 0.1386\text{ ms}^{-1}$.

$$A(t) = A_0\exp(-\lambda t) \rightarrow \exp(-\lambda t) = \frac{1}{3} \rightarrow \boxed{t = 7.92\text{ ms}}$$