

## Proves d'accés a la universitat

---

# Matemàtiques

## Sèrie 2

| Qualificació           |   | TR |
|------------------------|---|----|
| Qüestions              | 1 |    |
|                        | 2 |    |
|                        | 3 |    |
|                        | 4 |    |
|                        | 5 |    |
|                        | 6 |    |
| Suma de notes parcials |   |    |
| Qualificació final     |   |    |

Etiqueta de l'alumne/a



Ubicació del tribunal .....

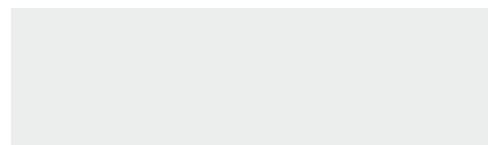
Número del tribunal .....

---

Etiqueta de qualificació



Etiqueta del corrector/a



---

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podem utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podem utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessitem més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiquem clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

---

1. Sigui  $f'(x) = 3x^2 - 12x$  la derivada d'una funció  $f(x)$ .
- a) Si sabem que  $f(x)$  talla l'eix de les abscisses en  $x = 1$ , calculeu l'expressió de la funció  $f(x)$ .  
[0,75 punts]

- b) Calculeu l'abscissa del punt d'inflexió de  $f(x)$  i estudeu la concavitat de la funció.  
[0,75 punts]

- c) Sabem que l'àrea del recinte limitat per la corba  $y=f''(x)$ , l'eix de les abscisses i les rectes  $x=0$  i  $x=a$ , amb  $a > 2$ , és  $15u^2$ . Calculeu el valor de  $a$ .  
[1 punt]

| Espai per al corrector/a |       |  |
|--------------------------|-------|--|
| Qüestió 1                | $a$   |  |
|                          | $b$   |  |
|                          | $c$   |  |
|                          | Total |  |

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real  $a$ :

$$\begin{cases} ax + 2y + 3z = 2 \\ 2x + ay + z = a \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

**a)** Discuti el sistema per als diferents valors del paràmetre  $a$ .

[1,5 punts]

**b)** Resoleu, si és possible, el sistema per al cas  $a = 2$ .

[1 punt]

| Espai per al corrector/a |       |  |
|--------------------------|-------|--|
| Qüestió 2                | $a$   |  |
|                          | $b$   |  |
|                          | Total |  |

3. Sigui la recta  $r$  definida per l'expressió següent:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

**a)** Determineu la posició relativa de la recta  $r$  respecte al pla  $\pi: x - 2y + 4z - 4 = 0$ . Si és paral·lela, calculeu la distància de  $r$  a  $\pi$ , i si és secant, calculeu el punt de tall.

[1,25 punts]

- b)** Calculeu l'equació de la recta  $s$  perpendicular al pla  $\pi$  i que talla la recta  $r$  en un punt  $P$ , la primera coordenada del qual és 5 vegades més gran que la segona.  
[1,25 punts]

| Espai per al corrector/a |       |  |
|--------------------------|-------|--|
| Qüestió 3                | $a$   |  |
|                          | $b$   |  |
|                          | Total |  |

4. **a)** Trobeu una funció polinòmica  $y = g(x)$  de grau 3 tal que talli l'eix de les ordenades en el punt  $(0, 5)$ , que la recta tangent a  $y = g(x)$  en el punt d'abscissa  $x = 1$  sigui horitzontal i que  $g''(x) = 2x + 1$ .  
[1 punt]



- b)** Comproveu que la funció  $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$  té una arrel a  $x = 2$  i que és estrictament creixent a l'interval  $(0, 4)$ . Utilitzeu aquesta informació per a calcular l'àrea determinada per la funció  $f(x)$ , l'eix de les abscisses i les rectes  $x = 0$  i  $x = 4$ .

[1,5 punts]

| Espai per al corrector/a |          |  |
|--------------------------|----------|--|
| Qüestió 4                | <i>a</i> |  |
|                          | <i>b</i> |  |
|                          | Total    |  |

5. Sigui la matriu  $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ , que depèn dels paràmetres  $a$ ,  $b$  i  $c$ .

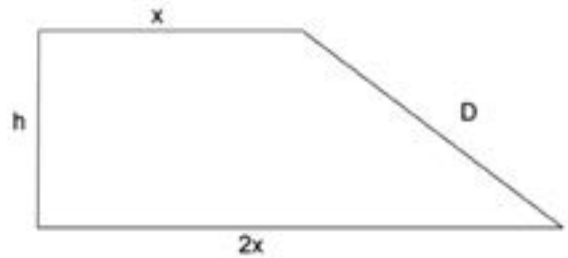
**a)** Calculeu les matrius  $X$  tals que  $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  
[1,5 punts]

- b)** Determineu els valors de  $a$ ,  $b$  i  $c$  perquè la matriu inversa de  $X$  sigui  $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

[1 punt]

| Espai per al corrector/a |       |  |
|--------------------------|-------|--|
| Qüestió 5                | $a$   |  |
|                          | $b$   |  |
|                          | Total |  |

6. Al pati d'una escola es vol crear una àrea de joc de  $30 \text{ m}^2$  per als més petits en forma de trapezi rectangular, de manera que la base més gran mesuri el doble que la base més petita, tal com mostra la figura, i que el costat oblic respecte a les bases ( $D$ ) sigui tan curt com sigui possible.



- a) Justifiqueu que se satisfan les relacions següents:  $h = \frac{20}{x}$  i  $D(x) = \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}$ .  
[1 punt]

- b)** Trobeu les dimensions del trapezi per a les quals la longitud del costat  $D$  és mínima.  
[1,5 punts]

| Espai per al corrector/a |       |  |
|--------------------------|-------|--|
| Qüestió 6                | $a$   |  |
|                          | $b$   |  |
|                          | Total |  |

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|--|--|

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|--|--|

Etiqueta de l'alumne/a



Institut  
d'Estudis  
Catalans



## Proves d'accés a la universitat

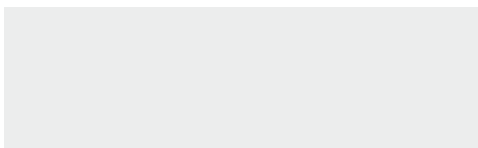
---

# Matemàtiques

## Sèrie 5

| Qualificació           |   | TR |
|------------------------|---|----|
| Qüestions              | 1 |    |
|                        | 2 |    |
|                        | 3 |    |
|                        | 4 |    |
|                        | 5 |    |
|                        | 6 |    |
| Suma de notes parcials |   |    |
| Qualificació final     |   |    |

Etiqueta de l'alumne/a

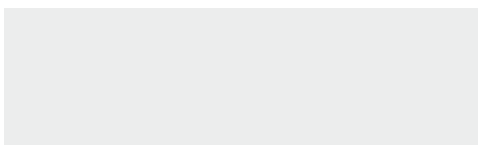


Ubicació del tribunal .....

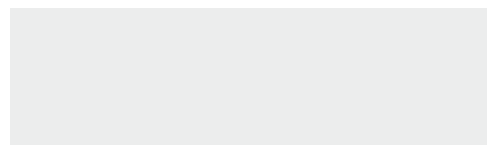
Número del tribunal .....

---

Etiqueta de qualificació



Etiqueta del corrector/a



---

Responen a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

---

1. Siguin les matrius  $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  i  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ .

a) Comproveu que  $C^3 = I_2$ , en què  $I_2$  és la matriu identitat d'ordre 2, i deduiu que la matriu  $C$  és invertible i que  $C^{-1} = C^2$ . Calculeu  $C^{2022}$ .

[1,5 punts]

**b)** Resoleu l'equació matricial  $C \cdot X = A - 2I_2$ .

[1 punt]

| Espai per al corrector/a |          |  |
|--------------------------|----------|--|
| Qüestió 1                | <i>a</i> |  |
|                          | <i>b</i> |  |
|                          | Total    |  |

2. Considereu la funció  $f(x) = x^3$  i sigui  $a$  un nombre real estrictament positiu.
- a)** Calculeu l'equació de la recta  $t$  tangent a la gràfica de la funció  $f$  en el punt d'abscissa  $x = a$ . Trobeu el punt de tall de la recta  $t$  amb l'eix de les abscisses (en funció de  $a$ ).
- [1,25 punts]

- b)** Feu un esbós de la gràfica de la funció  $f$  i la recta  $t$ . Calculeu el valor de  $a$  perquè l'àrea en el primer quadrant limitada per la funció  $f$ , la recta  $t$  i l'eix de les abscisses sigui  $108 u^2$ .

[1,25 punts]

| Espai per al corrector/a |       |  |
|--------------------------|-------|--|
| Qüestió 2                | $a$   |  |
|                          | $b$   |  |
|                          | Total |  |

3. Considereu el sistema d'equacions lineals

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 0 \\ my + (3 - m)z = -6 \\ 2x - y + mz = 6 \end{array} \right\},$$

en què  $m$  és un paràmetre real.

**a)** Discuti el sistema per als diferents valors del paràmetre  $m$ .

[1,25 punts]

**b)** Resoleu el sistema, si és possible, quan  $m = 0$  i quan  $m = 3$ . En cada cas, doneu la posició relativa dels tres plans a  $\mathbb{R}^3$ .

[1,25 punts]

| Espai per al corrector/a |          |  |
|--------------------------|----------|--|
| Qüestió 3                | <i>a</i> |  |
|                          | <i>b</i> |  |
|                          | Total    |  |

4. A  $\mathbb{R}^2$ , considereu els triangles rectangles que tenen els vèrtexs en els punts  $O = (0, 0)$ ,  $A = (x, 0)$  i  $B = (0, y)$ , amb  $x > 0$  i  $y > 0$ , i en què la suma dels catets és 10.
- a)** Expressen l'àrea del triangle  $AOB$  en funció de  $x$ . Per a quin valor de  $x$  l'àrea del triangle  $AOB$  és la més gran possible? Quin valor té aquesta àrea màxima?
- [1,25 punts]



- b)** Expressiu la hipotenusa del triangle  $AOB$  en funció de  $x$ . Per a quin valor de  $x$  la hipotenusa del triangle  $AOB$  és la més petita possible? Quin és aquest valor mínim?  
[1,25 punts]

| Espai per al corrector/a |       |  |
|--------------------------|-------|--|
| Qüestió 4                | $a$   |  |
|                          | $b$   |  |
|                          | Total |  |

5. Siguin els punts  $A = (0, 0, 1)$ ,  $B = (1, 1, 1)$ ,  $C = (-1, -1, 1)$  i  $D = (1, 0, 1)$ .
- a)** Comproveu que tres d'aquests punts estan alineats. Determineu quins són els tres punts i calculeu l'equació contínua i l'equació paramètrica de la recta que defineixen.
- [1,25 punts]

- b)** Calculeu l'equació general o cartesiana del pla que determinen els quatre punts.  
[1,25 punts]

| Espai per al corrector/a |          |  |
|--------------------------|----------|--|
| Qüestió 5                | <i>a</i> |  |
|                          | <i>b</i> |  |
|                          | Total    |  |

6. La columna de l'esquerra de la taula següent mostra l'esquema d'un programa informàtic que s'ha elaborat per a trobar solucions aproximades d'una equació  $f(x) = 0$  en un interval  $(a, b)$ , sabent que  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . La columna de la dreta recull un exemple de funcionament del programa en què es pot veure com actuaria per trobar una solució de l'equació  $x + \ln(x) = 0$  entre els valors  $a = 0,5$  i  $b = 2$ .

| <i>Esquema del programa</i>   | <i>Exemple</i>  |           |     |     |       |     |   |            |     |      |            |     |       |            |     |        |            |     |         |            |          |         |            |          |           |            |            |           |  |       |  |
|---|---|-----------|-----|-----|-------|-----|---|------------|-----|------|------------|-----|-------|------------|-----|--------|------------|-----|---------|------------|----------|---------|------------|----------|-----------|------------|------------|-----------|--|-------|--|
| 1. Escriure «Introduïu un valor $a$ »   | L'usuari introdueix $a = 0,5$   |           |     |     |       |     |   |            |     |      |            |     |       |            |     |        |            |     |         |            |          |         |            |          |           |            |            |           |  |       |  |
| 2. Escriure «Introduïu un valor $b$ »   | L'usuari introdueix $b = 2$   |           |     |     |       |     |   |            |     |      |            |     |       |            |     |        |            |     |         |            |          |         |            |          |           |            |            |           |  |       |  |
| 3. Escriure «Introduïu una funció $f(x)$ »  | L'usuari introdueix $f(x) = x + \ln(x)$   |           |     |     |       |     |   |            |     |      |            |     |       |            |     |        |            |     |         |            |          |         |            |          |           |            |            |           |  |       |  |
| 4. Calcular $c = (a + b)/2$   | El programa calcula la mitjana entre $a$ i $b$ i li assigna el nom $c = (0,5 + 2)/2 = 1,25$   |           |     |     |       |     |   |            |     |      |            |     |       |            |     |        |            |     |         |            |          |         |            |          |           |            |            |           |  |       |  |
| 5. Si $f(a) \cdot f(c) < 0$ , aleshores reassignar $b = c$ ; en cas contrari, reassignar $a = c$      | El programa comprova que $f(0,5) \cdot f(1,25) = (0,5 + \ln(0,5)) \cdot (1,25 + \ln(1,25)) < 0$ ; per tant, reassigna $b = 1,25$  |           |     |     |       |     |   |            |     |      |            |     |       |            |     |        |            |     |         |            |          |         |            |          |           |            |            |           |  |       |  |
| 6. Repetir els passos 4 i 5 tants cops com faci falta fins que $f(a) - f(b) < 0,00000001$             | El programa va repetint la comprovació anterior, canviant cada vegada els valors de $a$ o de $b$ : <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th><math>a</math></th> <th><math>b</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>inici</td> <td>0,5</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>iteració 1</td> <td>0,5</td> <td>1,25</td> </tr> <tr> <td>iteració 2</td> <td>0,5</td> <td>0,875</td> </tr> <tr> <td>iteració 3</td> <td>0,5</td> <td>0,6875</td> </tr> <tr> <td>iteració 4</td> <td>0,5</td> <td>0,59375</td> </tr> <tr> <td>iteració 5</td> <td>0,546875</td> <td>0,59375</td> </tr> <tr> <td>iteració 6</td> <td>0,546875</td> <td>0,5703125</td> </tr> <tr> <td>iteració 7</td> <td>0,55859375</td> <td>0,5703125</td> </tr> <tr> <td></td> <td>[...]</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> |           | $a$ | $b$ | inici | 0,5 | 2 | iteració 1 | 0,5 | 1,25 | iteració 2 | 0,5 | 0,875 | iteració 3 | 0,5 | 0,6875 | iteració 4 | 0,5 | 0,59375 | iteració 5 | 0,546875 | 0,59375 | iteració 6 | 0,546875 | 0,5703125 | iteració 7 | 0,55859375 | 0,5703125 |  | [...] |  |
|   | $a$   | $b$       |     |     |       |     |   |            |     |      |            |     |       |            |     |        |            |     |         |            |          |         |            |          |           |            |            |           |  |       |  |
| inici   | 0,5   | 2         |     |     |       |     |   |            |     |      |            |     |       |            |     |        |            |     |         |            |          |         |            |          |           |            |            |           |  |       |  |
| iteració 1  | 0,5   | 1,25      |     |     |       |     |   |            |     |      |            |     |       |            |     |        |            |     |         |            |          |         |            |          |           |            |            |           |  |       |  |
| iteració 2  | 0,5   | 0,875     |     |     |       |     |   |            |     |      |            |     |       |            |     |        |            |     |         |            |          |         |            |          |           |            |            |           |  |       |  |
| iteració 3  | 0,5   | 0,6875    |     |     |       |     |   |            |     |      |            |     |       |            |     |        |            |     |         |            |          |         |            |          |           |            |            |           |  |       |  |
| iteració 4  | 0,5   | 0,59375   |     |     |       |     |   |            |     |      |            |     |       |            |     |        |            |     |         |            |          |         |            |          |           |            |            |           |  |       |  |
| iteració 5  | 0,546875  | 0,59375   |     |     |       |     |   |            |     |      |            |     |       |            |     |        |            |     |         |            |          |         |            |          |           |            |            |           |  |       |  |
| iteració 6  | 0,546875  | 0,5703125 |     |     |       |     |   |            |     |      |            |     |       |            |     |        |            |     |         |            |          |         |            |          |           |            |            |           |  |       |  |
| iteració 7  | 0,55859375  | 0,5703125 |     |     |       |     |   |            |     |      |            |     |       |            |     |        |            |     |         |            |          |         |            |          |           |            |            |           |  |       |  |
|   | [...]   |           |     |     |       |     |   |            |     |      |            |     |       |            |     |        |            |     |         |            |          |         |            |          |           |            |            |           |  |       |  |
| 7. Quan $f(a) - f(b) < 0,00000001$ , escriure: «La solució de l'equació és $c$ » i aturar el programa | Després d'unes 30 iteracions, el programa escriu: «La solució de l'equació és 0,56714329»   |           |     |     |       |     |   |            |     |      |            |     |       |            |     |        |            |     |         |            |          |         |            |          |           |            |            |           |  |       |  |

- a) Expliqueu per què aquest programa és capaç de trobar una solució aproximada de l'equació  $x + \ln(x) = 0$  entre els valors  $a = 0,5$  i  $b = 2$ .

[1,25 punts]

**b)** Volem aplicar aquest programa per a trobar les tres arrels de  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$  amb valors de  $a$  i  $b$  diferents. Trobeu justificadament entre quins valors  $a$  i  $b$ , per a cada arrel, hem d'aplicar el programa per a trobar aproximacions de cadascuna de les tres arrels de la funció.

[1,25 punts]

| Espai per al corrector/a |       |  |
|--------------------------|-------|--|
| Qüestió 6                | $a$   |  |
|                          | $b$   |  |
|                          | Total |  |

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|--|--|

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|--|--|

Etiqueta de l'alumne/a



Institut  
d'Estudis  
Catalans