1. GRUP, CÒS, ESPAI VECTORIAL, ÀLGEBRA.

GRUP: $(G,*)$ conjunt G amb operació *interna* $*$ amb les propietats:

1) Associativa: $\forall a,b,c \in G : (a*b)*c = a*(b*c)$.

2) $\exists$ neutre $e \in G \mid a*e = a$, $\forall a \in G$.

3) $\forall a \in G$, $\exists$ *invers* $a' \mid a*a' = e$.

Si $*$ és commutativa: $(a*b)=(b*a)$, $\forall a,b \in G$ el grup es diu que és *abelià*.

CÒS: $(K,+,\cdot)$ conjunt K i operacions $+,\cdot$ *internes* amb les propietats:

1) $(K,+)$ grup abelià (amb neutre: e).

2) $(K-\{e\},\cdot)$ grup abelià.

3) $\cong$ es distributiva respecte $+$: $\forall a,b,c \in K : a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$.

Notació: escriurem $\begin{cases} 0 \text{ neutre respecte } + \\ 1 \text{ neutre respecte } \cdot \end{cases}$ $\begin{cases} -a : \text{invers de } a \text{ respecte de } + \\ a^{-1} : \text{invers de } a \text{ respecte de } \cdot \end{cases}$

ESPAI VECTORIAL: E és un espai vectorial sobre K si:

1) $(E,+)$ grup abelià (anomenarem *vectors* als seus elements).
2) $(K,+,\cdot)$ còs (anomenarem *escalars* als seus elements).
3) Tenim una operació: $\begin{array}{l} K\times E \to E \\ (\lambda,\vec{\mathbf{a}}) \mapsto \lambda\vec{\mathbf{a}} \end{array}$ amb les propietats:

   i) $\lambda(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}) = \lambda\vec{\mathbf{a}} + \lambda\vec{\mathbf{b}}$.
   ii) $(\lambda+\mu)\vec{\mathbf{a}} = \lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{a}}$.
   iii) $\lambda(\mu\vec{\mathbf{a}}) = (\lambda\cdot\mu)\vec{\mathbf{a}}$.
   iv) $1\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}$

Notació: escriurem $\begin{cases} \vec{\mathbf{0}} \text{ neutre de } E \\ 0 \text{ neutre de } K \text{ respecte de } + \\ 1 \text{ nuetre de } K \text{ respecte de } \cdot \end{cases}$ $\begin{cases} -a = \text{invers de } \vec{\mathbf{a}} \\ -\lambda : \text{invers de } \lambda \text{ respecte de } + \\ \lambda^{-1} \text{ invers de } \lambda \text{ respecte de } \cdot \end{cases}$

ÀLGEBRA: E és una àlgebra si:

1) E és un espai vectorial sobre K.

2) Tenim una operació interna $\begin{array}{l} E\times E\to E \\ (\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}})\mapsto \vec{\mathbf{a}}\circ\vec{\mathbf{b}} \end{array}$ distributiva (pels dos costats) respecte de la suma de vectors $\begin{cases} \vec{\mathbf{a}}\circ(\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}})=\vec{\mathbf{a}}\circ\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{a}}\circ\vec{\mathbf{c}} \\ (\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})\circ\vec{\mathbf{c}}=\vec{\mathbf{a}}\circ\vec{\mathbf{c}}+\vec{\mathbf{b}}\circ\vec{\mathbf{c}} \end{cases}$

Si $\circ$ és associativa: àlgebra associativa.
Si $\circ$ és commutativa: àlgebra abeliana.
Si $\exists$ neutre respecte de $\circ$: àlgebra amb unitat.

2. ESPAIS VECTORIALS (GENERAL).

E: espai vectorial sobre K.

SUBESPAI LINEAL: $E'\subset E$ és un subespai lineal de E' si és espai vectorial respecte les mateixes operacions.

Això equival a dir que $\begin{cases} E' \text{ és subgrup de } E \\ \forall\lambda\in K:\lambda E'\in E' \text{ (és a dir, si } \vec{\mathbf{a}}\in E'\Rightarrow\lambda\vec{\mathbf{a}}\in E') \end{cases}$

HOMOMORFISMES ENTRE ESPAIS VECTORIALS: Siguin E,F dos espais vectorials *sobre el mateix còs* K, diem que l'aplicació $f:E\to F$ és un *homomorfisme* si $\begin{cases} \forall\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}\in E: f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})=f(\vec{\mathbf{a}})+f(\vec{\mathbf{b}}) \\ \forall\vec{\mathbf{a}}\in E,\forall\lambda\in K: f(\lambda\vec{\mathbf{a}})=\lambda f(\vec{\mathbf{a}}) \end{cases}$

- *Isomorfisme* = homomorfisme bijectiu.

- Considerem el conjunt dels Homomorfismes de E sobre F, on hi *definim* les operacions:

$$\begin{cases} \text{suma}: f+f':(f+f')(\vec{\mathbf{a}})\equiv f(\vec{\mathbf{a}})+f'(\vec{\mathbf{a}}) \\ \text{producte per escalar}: \lambda f:(\lambda f)(\vec{\mathbf{a}})\equiv\lambda f(\vec{\mathbf{a}}) \quad (\lambda\in\mathrm{K}) \end{cases}$$

Aquestes operacions estan *ben definides*, és a dir, $(f+f')$ i (λf) són també homomorfismes (demostració trivial).

El conjunt dels homomorfismes de E sobre F amb les operacions definides és un *espais vectorial sobre* K que denotarem per $\mathrm{Hom}(H,F)$.

(Demostració trivial)

ENDOMORFISMES DINS UN ESPAI VECTORIAL: un endomorfisme de E és un homomorfisme de E sobre E.

El conjunt d'endomorfismes de E és un espai vectorial sobre K que denotarem per $\mathrm{End}(E)$.

- Producte d'endomorfismes: Donats $f, f' \in \mathrm{End}(E)$ definim el seu *producte*: $f \circ f' : (f \circ f')(\vec{\mathbf{a}}) = f(f'(\vec{\mathbf{a}}))$.

  Aquest producte està *ben definit*, és a dir, $f \circ f' \in \mathrm{End}(E)$ (Demostració trivial). El producte $\circ$ té les propietats (demostració trivial):

  1) Distributiva pels dos costats: $f \circ (f_1 + f_2) = f \circ f_1 + f \circ f_2$
     $(f_1 + f_2) \circ f = f_1 \circ f + f_2 \circ f$.

  2) Associativa: $(f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1 \circ (f_2 \circ f_3)$.

  3) No commutativa: $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$ en general.

  4) $\exists$ neutre: $\mathbf{1}(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{a}} \mid f \circ \mathbf{1} = \mathbf{1} \circ f = f$.

L'espai vectorial $\mathrm{End}(E)$ amb el producte $\circ$ constitueix un àlgebra associativa, no abeliana amb unitat.

- Commutador d'endomorfisme: Donats $f, f' \in \mathrm{End}(E)$ definim el seu *commutador:* $[f, f'] \equiv f \circ f' - f' \circ f$.

La definició és *connecta*, és a dir $[f, f'] \in \mathrm{End}(E)$ (demostració trivial)

Propietats del $[\,,\,]$ (demostració trivial).

1) Distributiva pels dos costats $\begin{cases} [f, f_1 + f_2] = [f, f_1] + [f, f_2] \\ [f_1 + f_2, f] = [f_1, f] + [f_2, f] \end{cases}$

2) No associativa: $[[f_1, f_2], f_3] \neq [f_1, [f_2, f_3]]$ en general.

3) Jacobi-associativa: $[[f_1, f_2], f_3] + [[f_2, f_3], f_1] + [[f_3, f_1], f_2] = 0$ (identitat de Jacobi).

4) Anti-commutativa: $[f_1, f_2] = -[f_2, f_1]$.

5) *No* $\exists$ neutre.

L'espai vectorial $\mathrm{End}(E)$ amb el commutador $[\,,\,]$ constitueix un àlgebra Jacobi-associativa, anti-commutativa, sense unitat.

INDEPENDÈNCIA LINEAL.

- Un conjunt *finit* de vectors, $\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{u}}_n$, d'un espai vectorial E es diu que és linealment independent si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{\mathbf{u}}_1 = \vec{\mathbf{0}} \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i$.

- Un conjunt *infinit* de vectors és linealment independent si *tot* subconjunt finit ho és.

ESPAI GENERAT PER UN CONJUNT (FINIT O INFINIT) DE VECTORS: és el conjunt de totes les combinacions lineals *finites* d'aquests vectors. És un subespai lineal de E (demostració trivial).

Nota: Espai generat = envoltura lineal = $\langle \ \rangle$

BASE d'un espai vectorial E és un conjunt. De vectors que són:

- Linealment independents.

- Generen E.

Teorema de la base: si E té base finita qualsevol altre base de E té el mateix número d'elements (omitim demostració).

Dimensió de E = número d'elements d'una base (qualsevol) de E

Si E no té base finita direm que E és de *dimensió infinita.*

TEOREMA DEL ISOMORFISME:

Teorema del isomorfisme: Dos espais E, F (sobre K) de *dimensió finita* són *isomorfs* si i només si $\dim E = \dim F$ (demostració trivial).

3. ESPAIS VECTORIALS DE DIMENSIÓ FINITA SOBRE $\mathbb{R}$ O $\mathbb{C}$.

E: espai vectorial de dimensió finita sobre $K (= \mathbb{R}$ O $\mathbb{C})$
$\{\vec{\mathbf{e}}_1, , \vec{\mathbf{e}}_n\}$ base de E.

COMPONENTS D'UN VECTOR $\vec{\mathbf{a}}$: Per definició de base tenim $\vec{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_i \equiv x_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_i$

- Diem que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ són les *components* de $\vec{\mathbf{a}}$ en la base $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ i representem el vector $\vec{\mathbf{a}}$ per la "matriu columna" $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

  Fixada una base les components de cada vector són *úniques* (demostració trivial).

MATRIU D'UN HOMOMORFISME:

- $\left.\begin{array}{l} \hat{A}: E \to F \text{ homomorfisme} \\ \{\vec{\mathbf{e}}_1 \ldots \vec{\mathbf{e}}_n\} \text{ base de } E \\ \{\vec{\mathbf{f}}_1 \ldots \vec{\mathbf{f}}_n\} \text{ base de } F \end{array}\right\}$ definim A_{ij} : $\boxed{\hat{A}(\vec{\mathbf{e}}_j) \equiv A_{ij}\vec{\mathbf{f}}_i}$

Si $\begin{cases} \vec{\mathbf{a}} = x_j \vec{\mathbf{e}}_j \\ \hat{A}(\vec{\mathbf{a}}) = y_i \vec{\mathbf{f}}_i \end{cases} \Rightarrow \boxed{y_i = A_{ij} x_j} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{matrix}} \underset{y = Ax}{\overset{=}{\Updownarrow}} \boxed{\begin{matrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{matrix}} \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}}$

- La notació matricial, és doncs, molt còmoda per "transformar vectors".

- També ho és per les operacions entre homorfismes:

$$\left.\begin{array}{l} (\hat{A} + \hat{B})_{ij} = A_{ij} + A_{ij} \\ (\lambda \hat{A})_{ij} = \lambda \hat{A}_{ij} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} \hat{0}_{ij} = 0 \\ (-\hat{A})_{ij} = -\hat{A}_{ij} \end{array}\right\}$$

(demostració trivial).

MATRIU D'UN ENDOMORFISME:

- $\left.\begin{array}{l} \hat{A}: E \to E \text{ endomorfisme} \\ \{\vec{\mathbf{e}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n\} \text{ base de } E \end{array}\right\}$ definim A_{ij} : $\boxed{\hat{A}(\vec{\mathbf{e}}_j) \equiv A_{ij}\vec{\mathbf{e}}_i}$

Si $\begin{cases} \vec{\mathbf{a}} = x_j \vec{\mathbf{e}}_j \\ \hat{A}(\vec{\mathbf{a}}) = y_i \vec{\mathbf{e}}_i \end{cases} \Rightarrow \boxed{y_i = A_{ij} x_j} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix}} \underset{y = Ax}{\overset{=}{\Updownarrow}} \boxed{\begin{matrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{matrix}} \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}}$

- Producte d'endomorfismes

$$(\hat{A} \circ \hat{B})_{ij} = A_{ik} B_{kj}, \qquad \mathbf{1}_{ij} = \delta_{ij} \qquad \text{(demostració trivial).}$$

- Traça i determinant

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tr}(\hat{A}) &\equiv \sum_{i=1}^{n} A_{ii} \\ \det(\hat{A}) &\equiv \sum_{i_1 \ldots i_n}^{n} \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} A_{1i_1} A_{2i_2} \ldots A_{ni_n} \end{aligned}\right\} \text{ són independents de la base escollida.}$$

Propietats: $\left.\begin{aligned} \operatorname{tr}(\hat{A}+\hat{B}) &= \operatorname{tr}(\hat{A}) + \operatorname{tr}(\hat{B}) \\ \det(\hat{A} \circ \hat{B}) &= \det(\hat{A}) \cdot \det(\hat{B}) \end{aligned}\right\}$

Compte!! $\left.\begin{aligned} \operatorname{tr}(AB) &\neq \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) \\ \det(A+B) &\neq \det(A) + \det(B) \end{aligned}\right\}$

Més propietats del determinant:

- La condició necessària i suficient per que $\det(A) = 0$ és que les files de la matriu A siguin linealment dependents (omitim demostració).
- $\det(A^T) = \det(A)$.

ENDOMORFISME INVERS:

Donat $\hat{A}: E \to E$ endomorfisme, diem que $\hat{A}$ té invers si $\exists \hat{A}^{-1}$ (endomorfisme que verifiqui $\hat{A} \circ \hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1} \circ \hat{A} = \mathbf{1}$).

- La condició necessària i suficient per que $\exists \hat{A}^{-1}$ és que $\det(\hat{A}) \neq 0$.
  - Necessària: si $\det(A) \neq 0$, en A és la matriu que representa $\hat{A}$; construïm la matriu

    $$A^{-1} \equiv \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \text{matriu dels} \\ \text{adjunts trasposada} \end{pmatrix}$$

    la qual té la propietat $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}$. Així, doncs hem construït la matriu del endomorfisme buscat.
  - Suficient:
    $\exists \hat{A}^{-1} \Rightarrow \hat{A}\hat{A}^{-1} = \mathbf{1} \Rightarrow \det(\hat{A}\hat{A}^{-1}) = \det(\hat{A})\det(\hat{A}^{-1}) = \det(\mathbf{1}) = 1$
    $\Rightarrow \det(\hat{A}^{-1}) = 1 / \det(\hat{A}) \Rightarrow \det(\hat{A}) \neq 0$.
- Al ser $\det(\hat{A})$, les columnes de A són linealment independents $\Leftrightarrow$ l'endomorfisme es bijectiu $\Leftrightarrow$ A: automorfisme.

CANVI DE BASE:

$$\left.\begin{array}{l} E,\{\vec{\mathbf{e}}_i\}\text{ base "antiga" de } E \\ E,\{\vec{\mathbf{e}}'_i\}\text{ base "nova" de } E \end{array}\right\} \text{ definim } C_{ij}:\ \vec{\mathbf{e}}_j \equiv C_{ij}\vec{\mathbf{e}}'_i$$

$$\text{Si } \begin{cases} \vec{\mathbf{a}} = x_j\vec{\mathbf{e}}_j \\ \hat{A}(\vec{\mathbf{a}}) = x'_i\vec{\mathbf{e}}'_i \end{cases} \Rightarrow \boxed{x'_i = C_{ij}x_j} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{matrix}} \underset{\Updownarrow}{\overset{=}{x'=Cx}} \boxed{\begin{matrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{matrix}} \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}}$$

- Com canvia la matriu d'un endomorfisme?

$$\begin{array}{l} \hat{A}: E \to E \\ \vec{\mathbf{a}} \mapsto \hat{A}(\vec{\mathbf{a}}) \end{array} \qquad \begin{cases} \vec{\mathbf{a}} = x_j\vec{\mathbf{e}}_j = x'_i\vec{\mathbf{e}}'_i \\ \hat{A}(\vec{\mathbf{a}}) = y_j\vec{\mathbf{e}}_j = y'_i\vec{\mathbf{e}}'_i \end{cases}$$

$$\text{Tenim les relacions: } \left.\begin{array}{l} x' = Cx \\ y' = Cy \\ y = Ax \\ y' = A'x' \end{array}\right\} \qquad y' = A'x' \Rightarrow Cy = A'Cx \Rightarrow CAx = A'Cx$$

$$\Rightarrow CA = A' \qquad \boxed{A' = CAC^{-1}}$$

$$A'_{ij} = C_{ik}A_{kl}\left(C^{-1}\right)$$

Nota: C^{-1} existeix, ja que al ser C la matriu d'un canvi de base, les seves files són linealment independents i per tant, $\det C \neq 0$.

DIAGONALITZACIÓ D'ENDOMORFISMES:

- Consisteix en buscar una base en la que la matriu de l'endomorfisme sigui *diagonal*. Això no és, en general, possible. Es pot demostrar, no obstant això, que tot endomorfisme, amb un canvi de base adequat, es pot posar en la *forma canònica de Jordan*.

- *Vectors propis i valors propis d'un endomorfisme:*

  Diem que $\vec{\mathbf{x}}$ és un *vector propi* de $\hat{A}$ i λ el *valor propi* corresponent si $\hat{A}\vec{\mathbf{x}} = \lambda\vec{\mathbf{x}}$ o, equivalentment, si $\left(\hat{A} - \lambda\hat{\mathbf{1}}\right)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$.

  Fixant una base, la relació anterior és un sistema homogeni d'equacions lineals $(A - \lambda\mathbf{1})\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$. La condició necessària i suficient per l'existència d'un vector $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ que compleixi l'equació és que:

$$\boxed{\det(A - \lambda\mathbf{1}) = 0}$$

- *Equació característica:*

L'expressió anterior, $\det(A-\lambda\mathbf{1})=0$, és una equació en la variable λ, que ha de ser satisfeta per *tots* els *valors propis*. Aquesta equació és *l'equació característica de* A. És una equació de grau n que té n solucions complexes (teorema fonamental de l'àlgebra). *Així tota matriu* $m\times n$ *té* n *valors propis complexes (comptant les multiplicitats).* Això no és cert a espais vectorials *reals* ja que una equació real de grau n *pot no tenir solucions reals.*

L'equació característica és invariant sota canvis de base: $A\xrightarrow{C}A'=CAC^{-1}$,
$|A'-\lambda\mathbf{1}|=\left|CAC^{-1}-\lambda CC^{-1}\right|=\left|C(A-\lambda\mathbf{1})C^{-1}\right|=|C||(A-\lambda\mathbf{1})||C^{-1}|=|A-\lambda\mathbf{1}|$

Corol·lari: la traça, el determinant i els valors propis de $\hat{A}$ són *intrínsecs* (no depenent de la base escollida).

- *Vectors propis:*

  - *Teorema:* Si λ és valor propi de $\hat{A}\Rightarrow\exists$ vector propi associat.

    Demostració: λ: vector propi $\Rightarrow|A-\lambda|=0\Rightarrow(A-\lambda)\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{0}}$ té solució no trivial.

  - *Teorema:* Si λ_0 és valor propi amb multiplicitat $k\Rightarrow$el subespai propi corresponent té dimensió $\leq k$.

    Demostració: Si tingués dimensió $k+1\rightarrow$podem trobar base en que $A=\boxed{\begin{matrix}\lambda\mathbf{1} & A\\ 0 & B\end{matrix}}\rightarrow$polinomi característic és divisible per $(\lambda-\lambda_0)^{k+1}$ (absurd).

  - *Teorema:* Si $\vec{\mathbf{v}}_1,\ldots,\vec{\mathbf{v}}_n$ són vectors propis corresponents a valors propis $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ *diferents* dos a dos$\Rightarrow\{\vec{\mathbf{v}}_i\}$ són linealment independents.

    Demostració: Considerem $\sum\alpha_i\vec{\mathbf{v}}_i=\vec{\mathbf{0}}$ i apliquem $\prod_{i\neq k}(\hat{A}-\lambda_i)\sum_i\alpha_j\vec{\mathbf{v}}_j=\alpha_k\prod_{i\neq k}(\lambda_k-\lambda_i)\vec{\mathbf{v}}_k=\vec{\mathbf{0}}$.

ESPAI DUAL E**:**

- *Espai dual* de $E=\mathrm{Hom}(E,K)\equiv E'$.

- *Formes* = elements de E'.

- Teorema: $\dim E' = \dim E$.
  Demostració: Donada una base $\{\vec{\mathbf{e}}_1 \ldots \vec{\mathbf{e}}_n\}$ de E definim les formes $\omega_1 \ldots \omega_n$ de manera que:

$$\omega_i(e_j) \equiv \delta_{ij}$$

  És immediat comprovar que les formes $\{\omega_i\}$ formen una base de E'

  - sòn linealment independents: $\lambda_i \omega_i = 0 \Rightarrow \lambda_i \omega_i(e_k) = \lambda_i \delta_{ik} = \lambda_k = 0, \forall k$.
  - Generen $E' : \omega \in E'$; definició: $\rho_i \equiv \omega(e_i) \rightarrow$ construïm $\rho_i \omega_i$ linealment independent comprovem que $\omega \equiv \rho_i \omega_i$ aplicant-ho als vectors e_k.

- Notem: $\vec{\mathbf{a}} = a_i \vec{\mathbf{e}}_i$; $\omega_i(\vec{\mathbf{a}}) = a_i$. La base $\{\omega_i\}$ és la *base dual* associada a la base $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$.

Així, E i E' sòn isomorfs, no obstant això, no existeix cap isomorfisme intrínsec entre E i E'.

- *Teorema:* E'' és idèntic a E, és a dir, existeix un isomorfisme intrínsec entre E i E''.

  Demostració: $E'' = \mathrm{Hom}(E', K)$

  Establim una aplicació $\quad E \rightarrow E''$
  $\vec{\mathbf{a}} \rightarrow \gamma_{\vec{\mathbf{a}}} \qquad$ on $\gamma_{\vec{\mathbf{a}}}$

$$\boxed{\gamma_{\vec{\mathbf{a}}}(\omega) = \omega(\vec{\mathbf{a}})}, \ \forall \omega \in E$$

  La definició de $\gamma_{\vec{\mathbf{a}}}$ és *correcta* ($\gamma_{\vec{\mathbf{a}}} \in E''$) (demostració trivial).

  És fàcil veure que la correspondència és un isomorfisme:

  - ❑ És injectiva: $\vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{b}} \rightarrow \gamma_{\vec{\mathbf{a}}} \neq \gamma_{\vec{\mathbf{b}}}$, si $\gamma_{\vec{\mathbf{a}}} = \gamma_{\vec{\mathbf{b}}} \Rightarrow$
    $\Rightarrow \gamma_{\vec{\mathbf{a}}}(\omega) = \gamma_{\vec{\mathbf{b}}}(\omega), \forall \omega \Rightarrow$
    $\Rightarrow \omega(\vec{\mathbf{a}}) = \omega(\vec{\mathbf{b}}), \forall \omega \Rightarrow$
    $\Rightarrow \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}}$.
  - ❑ És bijectiva: és injectiva i $\dim E'' = \dim E$.
  - ❑ És homomorfisme:
    - ∨ $\gamma_{\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}}(\omega) = \omega(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = \omega(\vec{\mathbf{a}}) + \omega(\vec{\mathbf{b}}) = \gamma_{\vec{\mathbf{a}}}(\omega) + \gamma_{\vec{\mathbf{b}}}(\omega) =$
      $= (\gamma_{\vec{\mathbf{a}}} + \gamma_{\vec{\mathbf{b}}})(\omega), \forall \omega$.
    - ∨ $\gamma_{\lambda\vec{\mathbf{a}}}(\omega) = \omega(\lambda\vec{\mathbf{a}}) = \lambda\omega(\vec{\mathbf{a}}) = \lambda\gamma_{\vec{\mathbf{a}}}(\omega), \forall \omega$.

Així hem establert un isomorfisme intrínsec entre E i E''.

Farem $\gamma_{\vec{\mathbf{a}}} \equiv \vec{\mathbf{a}}$: $\boxed{\omega(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{a}}(\omega)}$

- Canvi de base a E' induït per un canvi de base a E.

$$\left.\begin{array}{l} e_i \to e'_i \text{ amb } e_j = C_{ij} e'_i \\ \omega_j \to \omega_i \text{ amb } \omega_l = C'_{kl}\omega'_k \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \omega'_k \text{ base dual de } e'_i : \omega'_k(e'_i) = \delta_{ki} \\ \omega_l \text{ base dual de } e_j : \omega_l(e_j) = \delta_{lj} \end{array}\right\}$$

$$\to C'_{kl}\omega'_k(C_{ij}e'_i) = C'_{kl}C_{ij}\omega'_k(e'_i) = C'_{kl}C_{ij}\delta_{ki} = C'_{kl}C_{kj} = \delta_{li}.$$

4. TENSORS SOBRE ESPAIS VECTORIALS REALS DE DIMENSIÓ FINITA.

TENSORS COVARIANTS D'ORDRE 2: són aplicacions *bilineals* de $E \times E$ sobre $\mathbb{R}$:

$$T_2 : E \times E \to \mathbb{R}$$

$$(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) \mapsto T_2(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) \qquad \text{amb} \begin{cases} T_2(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{b}}') = T_2(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) + T_2(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}') \\ T_2(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{a}}', \vec{\mathbf{b}}) = T_2(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) + T_2(\vec{\mathbf{a}}', \vec{\mathbf{b}}') \\ T_2(\vec{\mathbf{a}}, \lambda\vec{\mathbf{b}}') = \lambda T_2(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) \\ T_2(\lambda\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) = \lambda T_2(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) \end{cases}$$

- Considerem el conjunt dels tensors covariants de 2n ordre, on hi definim:

  - Suma: $T_2 + T'_2$: $(T_2 + T'_2)(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) \equiv T_2(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) + T'_2(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}})$

  - Producte per escalars: λT_2 : $(\lambda T_2)(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) \equiv \lambda T_2(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}})$.

  Aquestes operacions estan *ben definides*, és a dir, $T_2 + T'_2$ i λT_2 són també tensors covariants de ordre 2 (demostració trivial) i donen el conjunt $\{T_2\}$ *l'estructura d'espai vectorial sobre* $\mathbb{R}$.

- Producte tensorial de formes: Donades $\omega, \omega' \in E'$ (dual d'E) definim el seu *producte tensorial*: $\omega \otimes \omega'$ de la següent manera:

$$\omega \otimes \omega'(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) \equiv \omega(\vec{\mathbf{a}})\omega'(\vec{\mathbf{b}}) \in \mathbb{R}$$

  És immediat veure que $\omega \otimes \omega'$ *és un tensor covariant d'ordre 2* (demostració trivial).

  Així, podem sumar i multiplicar per escalars els productes tensorials de formes (ja que ho podem fer amb tensors) és immediat veure que el *producte tenssorial és bilineal respecte dels factors*, és a dir:

$(\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2)\otimes(\lambda_1'\omega_1'+\lambda_2'\omega_2')=\lambda_1\lambda_1'\omega_1\otimes\omega_1'+\lambda_1\lambda_2'\omega_1\otimes\omega_2'+\lambda_2\lambda_1'\omega_2\otimes\omega_1'+\lambda_2\lambda_2'\omega_2\otimes\omega_2'$
(demostració trivial).

- *Teorema:* Donada una base $\{\vec{\mathbf{e}}_1\ldots\vec{\mathbf{e}}_n\}$ de E i la base dual corresponents $\{\omega_1\ldots\omega_n\}$ de E' els tensors $\omega_i\otimes\omega_j$, $\forall ij$ són una base de l'espai dels tensors covariants de 2n ordre.

  - Són linealment independents: $\lambda_{ij}\omega_i\otimes\omega_j=0\Rightarrow\lambda_{ij}\omega_i\otimes\omega_j(e_k,e_l)=$
    $=\lambda_{ij}\omega_i(e_k)\omega_j(e_l)=$
    $=\lambda_{ij}\delta_{ik}\delta_{jl}=\lambda_{kl}=0,\ \forall k,l$

  - Generen: donat T_2 calculem $\rho_{kl}\equiv T_2(e_k,e_l)$ i construïm $\rho_{kl}\omega_k\otimes\omega_l$ és immediat comprovar que $T_2=\rho_{kl}\omega_k\otimes\omega_l$ és suficient aplicar a $(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}})$ (demostració trivial).

- Així l'espai dels tensors covariants de 2n ordre té dimensió n^2 i tot tensor es pot escriure de la forma $a_{ij}\omega_i\otimes\omega_i$. Per aquesta raó denotarem a l'espai dels tensors T_2 per $E'\otimes E'$ producte tensorial de E' per ell mateix.

- La generalització a tensors covariants d'ordre p és trivial (aplicacions multilineals)

$$T_p:E\times E\times\ldots\times E\to|$$
$$\vec{\mathbf{a}}_1,\vec{\mathbf{a}}_2,\ldots,\vec{\mathbf{a}}_p\mapsto T_p(\vec{\mathbf{a}}_1,\vec{\mathbf{a}}_2,\ldots,\vec{\mathbf{a}}_p)$$

$$T_p=a_{i_1\ldots i_p}\omega_{i_1}\otimes\ldots\otimes\omega_{i_p}$$

$$\{T_p\}\equiv E'\otimes E'\otimes\ldots\otimes E'$$

TENSORS CONTRAVARIANTS D'ORDRE 2: són aplicacions *bilineals* de $E'\times E'\to|$

$$T^2:E'\times E'\to|$$
$$(\omega,\omega')\mapsto T_2(\omega,\omega')\qquad\text{(bilineals).}$$

- formen espai vectorial de dimensió n^2. Si $\vec{\mathbf{e}}_1,\ldots,\vec{\mathbf{e}}_n$ és una base de E tot tensor T^2 es pot escriure com $T^2=a^{ij}\vec{\mathbf{e}}_i\otimes\vec{\mathbf{e}}_j$. Denotarem per $E\otimes E$ l'espai vectorial dels tensors contravariants d'ordre 2.

- La generalització a termes contravariants d'ordre p és trivial. $E\otimes E\otimes\ldots\otimes E$.

- Els vectors es poden considerar *tensors contravariants d'ordre 1*: $T^1=a^i\vec{\mathbf{e}}_i$.

TENSORS MIXTES p-COVARIANTS I q-CONTRAVARIANTS

$$T_p^q : \overset{p}{E\times\ldots\times E}\times \overset{q}{E'\times\ldots\times E'} \to \mathbb{R}$$
$$\vec{\mathbf{a}}_1,\ldots,\vec{\mathbf{a}}_p,\omega_{(1)},\ldots,\omega_{(q)} \to T_p^q\left(\vec{\mathbf{a}}_1,\ldots,\vec{\mathbf{a}}_p,\omega_{(1)},\ldots,\omega_{(q)}\right) \qquad \text{(multilineal).}$$

$$T_p^q = a_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}\omega_{i_1}\otimes\ldots\otimes\omega_{i_p}\otimes e_{j_1}\otimes\ldots\otimes e_{j_q} \in \overset{p}{E'\otimes\ldots\otimes E'}\otimes \overset{q}{E\otimes\ldots E}.$$

CANVI DE LES COMPONENTS D'UN TENSOR INDUÏT PER UN CANVI DE BASE

Sigui C la matriu d'un canvi de base de E en que $e_i \to e'_i$. Tenim, per definició de C: $\boxed{e_i = C_{ij}e'_j}$ això indueix un canvi de base a l'espai dual. Si $\{\omega_i\}$ i $\{\omega'_i\}$ són les bases del dual de $\{e_i\}$ i $\{e'_i\}$ respectivament tenim que $\boxed{\omega_i = C'_{ij}\omega'_j}$ amb $C' = \left(C^{-1}\right)^T$.

Un tensor $T_p^q = a_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} e_{j_1}\otimes\ldots\otimes e_{j_q}\otimes\omega_{i_1}\otimes\ldots\otimes\omega_{i_p}$ s'escriurà ne la nova base com:

$$T_q^p = a_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} C_{k_1 j_1}C_{k_2 j_2}\ldots C_{k_q j_q}C'_{l_1 i_1}C'_{l_2 i_2}\ldots C'_{l_p i_p} e'_{k_1}\otimes\ldots\otimes e'_{k_q}\otimes\omega'_{l_1}\otimes\ldots\otimes\omega'_{l_p}.$$

Així

$$\boxed{a_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} \to a_{l_1\ldots l_p}^{k_1\ldots k_q} \equiv C_{k_1 j_1}\ldots C_{k_q j_q}C'_{l_1 i_1}\ldots C'_{l_p i_p} a_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}} \qquad C' = \left(C^{-1}\right)^T.$$

PRODUCTE TENSORIAL DE TENSORS (és la generalització del producte definit anteriorment)

Donats dos tensors $\begin{cases} T_p^q = a_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}\omega_{i_1}\otimes\ldots\otimes\omega_{i_p}\otimes e_{j_1}\otimes\ldots\otimes e_{j_q} \\ T'^s_r = b_{k_1\ldots k_r}^{l_1\ldots l_s}\omega_{k_1}\otimes\ldots\otimes\omega_{k_r}\otimes e_{l_1}\otimes\ldots\otimes e_{l_s} \end{cases}$ definim el seu producte tensorial:

$$T_p^q\otimes T'^s_r \equiv a_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} b_{k_1\ldots k_r}^{l_1\ldots l_s}\omega_{i_1}\otimes\ldots\otimes\omega_{i_p}\otimes\omega_{k_1}\otimes\ldots\otimes\omega_{k_r}\otimes e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_p}\otimes e_{l_1}\otimes\ldots\otimes e_{l_s}$$
$$\in \left\{T_{p+r}^{q+s}\right\}.$$

En components:

$$\boxed{\left(T_p^q\otimes T'^s_r\right)_{i_1\ldots i_p k_1\ldots k_r}^{j_1\ldots j_q l_1\ldots l_s} = \left(T_p^q\right)_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}\cdot\left(T'^s_r\right)_{k_1\ldots k_r}^{l_1\ldots l_s}}$$

CONTRACCIÓ INTERNA D'UN ÍNDEX COVARIANT AMB UN ÍNDEX CONTRVARIANT

Donat un tensor $T_p^q = a_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q} \otimes \omega_{i_1} \otimes \ldots \otimes \omega_{i_p}$, un índex covariant i_k i un índex contravariant j_l. La contracció interna d'aquests índex és el resultat d'aplicar ω_{i_k} a e_{j_l}:

$$a_{i_1\ldots i_k\ldots i_p}^{j_1\ldots j_l\ldots j_q} \omega_{i_1} \otimes \ldots \otimes \omega_{i_k} \otimes \ldots \omega_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_l} \otimes \ldots \otimes e_{j_q} =$$

$$= a_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} \omega_{i_1} \otimes \ldots \omega_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q} \cdot \left[\underbrace{\omega_{i_k}\left(e_{j_l}\right)}_{\delta_{i_k j_l}} \right] =$$

$$= a_{i_1\ldots i_k\ldots i_p}^{j_1\ldots i_k\ldots j_q} \omega_{i_1} \otimes \ldots \omega_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q} \in \left\{ T_{p-1}^{q-1} \right\}$$

En components:

$$\boxed{a_{i_1\ldots i_k\ldots i_p}^{j_1\ldots j_l\ldots j_q} = \sum_{\alpha} a_{i_1\ldots\alpha\ldots i_p}^{j_1\ldots\alpha\ldots j_q}}$$

CONTRACCIÓ EXTERNA DE DOS TENSORS (UN ÍNDEX COVARIANT AMB UN ÍNDEX CONTRAVARIANT)

Donats $T_p^q = a_{i_1\ldots i_m\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} \omega_{i_1} \otimes \ldots \omega_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q}$

$T_r^s = b_{k_1\ldots k_r}^{l_1\ldots l_n\ldots l_s} \omega_{i_1} \otimes \ldots \omega_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q}$

La contracció *externa* dels índex i_m (covariant) amb l_m (contravariant) és la contracció interna dels mateixos índexs en el tensor $T_p^q \otimes T_r^s$.

$$a_{i_1\ldots i_m\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} \omega_{i_1} \otimes \ldots \otimes \omega_{i_m} \otimes \ldots \omega_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q} b_{i_1\ldots i_p}^{l_1\ldots l_n\ldots l_q} \omega_{k_1} \otimes \ldots \omega_{k_r} \otimes e_{l_1} \ldots \otimes e_{l_n} \otimes \ldots \otimes e_{l_s} =$$

$$= a_{i_1\ldots i_m\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} b_{k_1\ldots k_r}^{l_1\ldots l_n\ldots l_s} \omega_{i_1} \otimes \ldots \omega_{i_p \otimes} \omega_{k_1} \otimes \ldots \omega_{k_r} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q} \otimes e_{l_1} \ldots \otimes e_{l_s} \in \left\{ T_{p+r}^{q+s} \right\}.$$

En components:

$$\boxed{a_{i_1\ldots i_k\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} b_{k_1\ldots k_r}^{l_1\ldots l_n\ldots l_s} = \sum_{\alpha} a_{i_1\ldots\alpha\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} \sum_{\alpha} b_{k_1\ldots k_r}^{l_1\ldots\alpha\ldots l_s}}$$

TENSOR MÈTRIC

- Direm que en un espai vectorial *real* tenim definit un *producte escalar* si tenim una operació *bilineal:* $E \times E \to \mathbb{R}$, simètric $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{a}}$.
  $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) \mapsto \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$.

- Si $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 0$ direm que $\vec{\mathbf{a}}$ és perpendicular a $\vec{\mathbf{b}}$.

- Donada una base de $\vec{\mathbf{e}}_1 \ldots \vec{\mathbf{e}}_n$ de E, el producte escalar ve completament especificat per $\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \equiv g_{ij}$, degut a la propietat de bilinealitat.

  Si $\omega_1 \ldots \omega_n$ és la *base dual* de $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ definim el *tensor mètric* corresponent al producte escalar definit anteriorment:

$$\boxed{T_M \equiv g_{ij} \omega_i \otimes \omega_j}$$

  És un tensor covariant de 2n ordre. Evidentment tenim (demostració trivial).

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = T_M(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}})}$$

- Si $\det g \neq 0$, el tensor mètric (producte escalar) estableix un *isomorfisme intrínsec* entre el E i el seu dual E'.

$$\left.\begin{array}{l} E \to E' \\ \vec{\mathbf{a}} \to \omega_{\vec{\mathbf{a}}} \equiv T_M(\vec{\mathbf{a}}, \ ) \end{array}\right\} \text{l'aplicació és òbviament lineal.}$$

  També és bijectiva: si: $\vec{\mathbf{a}} = x^i \vec{\mathbf{e}}_i \to T_M(\vec{\mathbf{a}}, \ ) = g_{ij} \omega_i(\vec{\mathbf{a}}) \omega_j = g_{ij} x^i \omega_j \equiv y_j \omega_j$

  $y_j = x^i g_{ij}$

  $x^i \equiv$ component *"contravariants"* de $\vec{\mathbf{a}}$.
  $y_j \equiv$ component de $\omega_{\vec{\mathbf{a}}}$ ="components covariants de $\vec{\mathbf{a}}$" (escriurem x_j).

  Al ser $\det g \neq 0$ la correspondència $y_i \,\Omega\, x^i$ (i per tant $\vec{\mathbf{a}} \,\Omega\, \omega_{\vec{\mathbf{a}}}$) és *bijectiva.*

- Generalització:

El tensor mètric estableix correspondències intrínseques entre tensors covariants, contravariants i mixtes del mateix ordre.

$$T_p^q = a_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \omega_{i_1} \otimes \ldots \omega_{i_p} \otimes \underset{\omega_{e_{j_1}}}{\underset{\downarrow}{e_{j_1}}} \otimes \ldots \otimes e_{j_q} \to T_p^q = a_{\alpha i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \omega_\alpha \otimes \ldots \omega_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q}$$

$$\text{amb } \boxed{a_{\alpha i_1 \ldots i_p}^{j_2 \ldots j_q} = a_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} g_{j_1 \alpha}}$$

- Nota: A l'espai euclidi amb una base ortonormal $g_{ij} = \delta_{ij} \Rightarrow x^i = x_i$ les components contravariants i covariants coincideixen.

  A l'espai de Minkowsky:

$$g_{\mu\nu} = \boxed{\begin{matrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{matrix}} \Rightarrow a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu \quad \begin{cases} a^\mu = \left(a^0, a^1, a^2, a^3\right) \\ a_\mu = \left(a^0, -a^1, -a^2, -a^3\right) = \left(a_0, a_1, a_2, a_3\right) \end{cases}$$

5. PRODUCTE TENSORIAL O KRONECKERIÀ D'ESPAIS I D'ENDOMORFISMES.

PRODUCTE TENSORIAL D'ESPAIS

El producte tensorial $E \otimes E$ es pot, òbviament, generalitzar a $E \otimes F$ usant el procediment descrit anteriorment. No obstant, prendrem la següent generalització que encara que menys "intrínseca" és més útil no necessita usar l'espai dual de E i F.

- Donats dos espais E, F sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ (tots dos) definim el conjunt dels "objectes" $\sum_{ij} a_{ij} \vec{\mathbf{a}}_i \otimes \vec{\mathbf{b}}_j$ on $\vec{\mathbf{a}}_i \in E$, $\vec{\mathbf{b}}_j \in F$ i *postulem* la propietat de *bilinealitat* del producte $\otimes$- d'aquesta manera si $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ és una base de E i $\{\vec{\mathbf{f}}_j\}$ és una base de F, els "objectes" anteriors es poden escriure com $\sum_{ij} b_{ij} \vec{\mathbf{e}}_i \otimes \vec{\mathbf{f}}_j$. Sobre el conjunt d'aquests objectes definim operadors:

  - Suma: $\left(\sum_{ij} a_{ij} \vec{\mathbf{e}}_i \otimes \vec{\mathbf{f}}_j\right) + \left(\sum_{ij} b_{ij} \vec{\mathbf{e}}_i \otimes \vec{\mathbf{f}}_j\right) \equiv \sum \left(a_{ij} + b_{ij}\right) \vec{\mathbf{e}}_i \otimes \vec{\mathbf{f}}_j$.

  - Producte per escalars: $\lambda \left(\sum_{ij} a_{ij} \vec{\mathbf{e}}_i \otimes \vec{\mathbf{f}}_j\right) \equiv \sum \left(\lambda a_{ij}\right) \vec{\mathbf{e}}_i \otimes \vec{\mathbf{f}}_j$.

  D'aquesta manera hem construït l'espai vectorial dels objectes $a_{ij} \vec{\mathbf{e}}_i \otimes \vec{\mathbf{f}}_j$ que denotarem per $E \otimes F$ (producte tensorial o kroneckerià de E i F) la dimensió del qual es diu $\dim E \cdot \dim F$ (ja que $\vec{\mathbf{e}}_i \otimes \vec{\mathbf{f}}_j$ és una base) (demostració trivial).

Els vectors de $E \otimes F$ venen identificats (un cop assolida la base $\vec{\mathbf{e}}_i \otimes \vec{\mathbf{f}}_j$) per les seves components a_{ij} que escriurem:

$$\boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{matrix}}$$

PRODUCTE TENSORIAL D'ENDOMORFISMES

- Donats $\hat{A}, \hat{B}$ endomorfismes de E i F respectivament, definim $\hat{A} \otimes \hat{B}$ a l'espai $E \otimes F$:

$$\hat{A} \otimes \hat{B}\left(\sum a_{ij} \vec{\mathbf{e}}_i \otimes \vec{\mathbf{f}}_j\right) = \sum a_{ij} \hat{A}(\vec{\mathbf{e}}_i) \hat{B}(\vec{\mathbf{f}}_j)$$

- Si $\left.\begin{matrix} A \text{ és la matriu de } \hat{A} \text{ en la base } \{\vec{\mathbf{e}}_i\} \text{ de } E \\ B \text{ és la matriu de } \hat{B} \text{ en la base } \{\vec{\mathbf{f}}_j\} \text{ de } F \end{matrix}\right\}$ tenim $\left.\begin{matrix} \hat{A}(\vec{\mathbf{e}}_i) = A_{ki} \vec{\mathbf{e}}_k \\ \hat{B}(\vec{\mathbf{f}}_j) = A_{lj} \vec{\mathbf{e}}_l \end{matrix}\right\}$

Així $\hat{A} \otimes \hat{B}\left(\sum a_{ij} \vec{\mathbf{e}}_i \otimes \vec{\mathbf{f}}_j\right) = a_{ij} A_{ki} B_{lj} \vec{\mathbf{e}}_k \otimes \vec{\mathbf{f}}_l \equiv a'_{kl} \vec{\mathbf{e}}_k \otimes \vec{\mathbf{f}}$

Tenim, doncs $a_{ij} \xrightarrow{\hat{A} \otimes \hat{B}} a'_{kl} = A_{ki} B_{lj} a_{ij} \equiv \hat{A} \otimes \hat{B}_{kl,ij} a_{ij}$

$$\boxed{(A \otimes B)_{kl,ij} = A_{ki} B_{lj}} = \begin{matrix} A_{11}B & A_{12}B & \cdots \\ A_{21}B & A_{22}B & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots \end{matrix}$$

Propietats:

a) $\hat{A} \otimes \hat{0} = \hat{0} \otimes \hat{B} = 0$

b) $\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}} = \hat{\mathbf{1}}$

c) $\begin{cases} (\hat{A}_1 + \hat{A}_2) \otimes \hat{B} = \hat{A}_1 \otimes \hat{B} + \hat{A}_2 \otimes \hat{B} \\ \hat{A} \otimes (\hat{B}_1 + \hat{B}_2) = \hat{A} \otimes \hat{B}_1 + \hat{A} \otimes \hat{B}_2 \end{cases}$

d) $\alpha \hat{A} \otimes \phi \hat{B} = \alpha\beta(\hat{A} \otimes \hat{B})$

e) $(\hat{A} \otimes \hat{B})(\hat{A}' \otimes \hat{B}') = (\hat{A}\hat{A}') \otimes (\hat{B}\hat{B}') \Rightarrow \hat{A} \otimes \hat{B} = (\hat{A} \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \hat{B})$

f) $\mathrm{tr}\left(\hat{A}\otimes\hat{B}\right)=\mathrm{tr}\hat{A}\cdot\mathrm{tr}\hat{B}$

g) $\det\left(\hat{A}\otimes\hat{B}\right)=\left(\det\hat{A}\right)^{\dim F}\left(\det\hat{B}\right)^{\dim F}$

- Nota: $\boxed{\text{No tot endomorfisme de } F\otimes F \text{ és del tipus } \hat{A}\otimes\hat{B}.}$

6. SUMA DIRECTA D'ESPAIS I D'ENDOMORFISMES.

SUMA I SUMA DIRCETA D'ESPAIS

- Donats E,F subespais de J definim: $E+F=\{\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}\mid\vec{\mathbf{u}}\in E,\vec{\mathbf{v}}\in F\}$ que és també, òbviament, un espai vectorial (demostració trivial) que anomenarem *suma de* E *i* F. Per construcció els vectors de $E+F$ s'escriuen sempre com a suma d'un vector de E i un de F. Aquesta descomposició *no* és en general única.

- Si tots els vectors de $E+F$ es descomposen de forma *única* com a suma d'un vector de E i un de F direm que $E+F$ és la *suma directa de* E *i* F i ho representem $E\oplus F$.

- *Teorema:* la condició necessària i suficient per que $E+F=E\oplus F$ és que $E\cap F=\{\vec{\mathbf{0}}\}$.

  Demostració:

  - Necessari: si $E+F=E\oplus F\Rightarrow$ tot vector de $E\oplus F$ té descomposició única, sigui $\vec{\mathbf{a}}\in E\cap F$.

    - Tenim $\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{0}}$ $\quad\left(\vec{\mathbf{a}}\in E,\vec{\mathbf{0}}\in F\right)$.
    - Tenim $\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{0}}+\vec{\mathbf{a}}$ $\quad\left(\vec{\mathbf{0}}\in E,\vec{\mathbf{a}}\in F\right)$.

    La descomposició de $\vec{\mathbf{a}}$ no és única a menys que $\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{0}}$ (q. e. d.).

  - Suficient: si $E\cap F=\{\vec{\mathbf{0}}\}$ i $\vec{\mathbf{a}}\in E+F$ admet les descomposicions:

    - $\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}$ $\quad\left(\vec{\mathbf{u}}\in E,\vec{\mathbf{v}}\in F\right)$.
    - $\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{u}}'+\vec{\mathbf{v}}'$ $\quad\left(\vec{\mathbf{u}}'\in E,\vec{\mathbf{v}}'\in F\right)$.

    $$\underbrace{\vec{\mathbf{u}}-\vec{\mathbf{u}}'}_{\in E}=\underbrace{\vec{\mathbf{v}}-\vec{\mathbf{v}}'}_{\in F}\Rightarrow\begin{matrix}\vec{\mathbf{u}}-\vec{\mathbf{u}}'\in E\cap F\\ \vec{\mathbf{v}}-\vec{\mathbf{v}}'\in E\cap F\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}\vec{\mathbf{u}}-\vec{\mathbf{u}}'=\vec{\mathbf{0}}\\ \vec{\mathbf{v}}-\vec{\mathbf{v}}'=\vec{\mathbf{0}}\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}\vec{\mathbf{u}}=\vec{\mathbf{u}}'\\ \vec{\mathbf{v}}=\vec{\mathbf{v}}'\end{matrix}\quad\text{(q. e. d.).}$$

- Base "suma directa": si $E\cap F=\{\vec{\mathbf{0}}\}$ i $\begin{matrix}\{\vec{\mathbf{e}}_i\}\text{ és una base de } E\\ \{\vec{\mathbf{f}}_j\}\text{ és una base de } F\end{matrix}$ el conjunt $\{\vec{\mathbf{e}}_i,\vec{\mathbf{f}}_j\}$ és una base de $E\oplus F$ (demostració trivial) que anomenarem *base "suma directa"*.

  Corol·lari: $\boxed{\dim E\oplus F=\dim E+\dim F}$

- Components d'un vector de $E \oplus F$ en una base "suma directa"

$$\text{si } \underbrace{\vec{\mathbf{a}}}_{\in E\oplus F} = \underbrace{\vec{\mathbf{u}}}_{\in E} + \underbrace{\vec{\mathbf{v}}}_{\in F}; \qquad \left.\begin{array}{l} \vec{\mathbf{u}} = x_i \vec{\mathbf{e}}_i \\ \vec{\mathbf{v}} = y_j \vec{\mathbf{f}}_j \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\mathbf{a}} = x_i \vec{\mathbf{e}}_i + y_j \vec{\mathbf{f}}_j \equiv \boxed{\begin{array}{c} x_1 \\ \\ x_m \\ y_1 \\ \\ y_n \end{array}}$$

Notes:

- Si $\vec{\mathbf{e}}_1 \ldots \vec{\mathbf{e}}_n$ és una base de E: $E = \langle \vec{\mathbf{e}}_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle \vec{\mathbf{e}}_n \rangle$ on $\langle \vec{\mathbf{e}}_k \rangle \equiv$ espai generat per $\vec{\mathbf{e}}_k$.

- Si $\hat{A}$ és un endomorfisme *diagonalitzble*, λ_i: valors propis i E_{λ_i}: els subespais propis corresponents. Tenim $E = E_{\lambda_i} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_N}$ ($N =$ número de valors propis diferents).

SUMA DIRECTA D'ENDOMORFISMES

- Donats $\hat{A}, \hat{B}$ endomorfismes de E i F respectivament definim $\hat{A} \oplus \hat{B}$ a l'espai $E \oplus F$:

$$\hat{A} \oplus \hat{B}\left(\underbrace{\vec{\mathbf{u}}}_{\in E} + \underbrace{\vec{\mathbf{v}}}_{\in F}\right) \equiv \underbrace{\hat{A}\vec{\mathbf{u}}}_{\in E} + \underbrace{\hat{B}\vec{\mathbf{v}}}_{\in F}$$

- La definició és correcta: $\hat{A} \oplus \hat{B}$ és un endomorfisme (demostració trivial)

- Si $\left.\begin{array}{l} A \text{ és la matriu de } \hat{A} \text{ en la base } \{\vec{\mathbf{e}}_i\} \text{ de } E \\ B \text{ és la matriu de } \hat{B} \text{ en la base } \{\vec{\mathbf{f}}_i\} \text{ de } F \end{array}\right\} \Rightarrow$ la matriu de $\hat{A} \oplus \hat{B}$ és la base "suma directa" $\{\vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\mathbf{f}}_j\}$ és $\begin{array}{cc} A & 0 \\ 0 & B \end{array}$ $A \oplus B$.

Propietats:

a) $\hat{A} \oplus \hat{B} + \hat{A}' \oplus \hat{B}' = \left(\hat{A} + \hat{A}'\right) \oplus \left(\hat{B} + \hat{B}'\right)$
b) $\left(\hat{A} \oplus \hat{B}\right) \cdot \left(\hat{A}' \oplus \hat{B}'\right) = \left(\hat{A} \cdot \hat{A}'\right) \oplus \left(\hat{B} \cdot \hat{B}'\right) \Rightarrow \hat{A} \oplus \hat{B} = \left(\hat{A} \oplus \hat{\mathbf{1}}\right) \cdot \left(\hat{\mathbf{1}} \oplus \hat{B}\right)$
c) $\mathrm{tr}\left(\hat{A} \oplus \hat{B}\right) = \mathrm{tr}\hat{A} + \mathrm{tr}\hat{B}$
d) $\det\left(\hat{A} \oplus \hat{B}\right) = \det \hat{A} \cdot \det \hat{B}$

Nota: $\boxed{\text{NO tot endomorfisme de } E \oplus F \text{ és del tipus } \hat{A} \oplus \hat{B}.}$