1. DESCOMPOSICIÓ ESPECTRAL D'UN OPERADOR AUTOADJUNT.

CAS D'UN ESPAI DE HILBERT DE DIMENSIÓ FINITA ($=N$)

Sabem que en aquest cas un operador hermític $\hat{A}$ és *diagonalitzable* siguin:

1. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \leq N)$ els valors propis (adequats $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$).

2. $M_{a_1}, M_{a_2}, \ldots, M_{a_n}$ $(n \leq N)$ els subespais propis corresponents $\left[\hat{A}\vec{\mathbf{x}} = a_k\vec{\mathbf{x}}; \forall \vec{\mathbf{x}} \in M_{a_k}\right]$.

3. $\hat{P}_{a_1}, \hat{P}_{a_2}, \ldots, \hat{P}_{a_n}$ $(n \leq N)$ els projectors sobre els subespais propis.

El fet de que $\hat{A}$ sigui diagonalitzable implica que:

$$, = M_{a_1} \oplus M_{a_2} \oplus \ldots \oplus M_{a_n}$$

[Efectivament, tot vector de , es pot escriure com a combinació lineal de vectors propis, la suma és directa ja que $M_{a_i} \perp M_{a_j}$ i, per tant, $M_{a_i} \cap M_{a_j} = \{0\}$].

És evident, llavors, que:

$$(*) \quad \boxed{\begin{array}{l} \hat{A} = \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{P}_{a_i} \\ \sum_{i=1}^{n} \hat{P}_{a_i} = \hat{\mathbf{1}} \end{array}} \qquad \begin{array}{l} \vec{\mathbf{x}} \equiv \vec{\mathbf{x}}_{a_1} + \vec{\mathbf{x}}_{a_2} + \ldots + \vec{\mathbf{x}}_{a_n} \\ \text{(Descomposició única)} \qquad \vec{\mathbf{x}}_{a_i} \in M_{a_i} \\ \hat{P}_{a_k}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}_{a_k} \end{array}$$

- *Canvi de rotació:*

$$\text{Definim } \hat{E}_{a_k} = \sum_{i=1}^{k} \hat{P}_{a_i} \rightarrow \left[\begin{array}{l} \hat{E}_{a_1} = \hat{P}_{a_1} \\ \hat{E}_{a_2} = \hat{P}_{a_1} + \hat{P}_{a_2} \\ \hat{E}_{a_3} = \hat{P}_{a_1} + \hat{P}_{a_2} + \hat{P}_{a_3} \\ \hat{E}_{a_4} = \hat{P}_{a_1} + \hat{P}_{a_2} + \ldots + \hat{P}_{a_n} = \hat{\mathbf{1}} \end{array}\right.$$

$\hat{E}_{a_k} \equiv$ són projectors i $E_{a_k} < E_{a_l}$ si $k < l$ (ja que $E_{a_k}E_{a_l} = E_{a_l}E_{a_k} = E_{a_k}$)

Definim $\Delta\hat{E}_{a_k} \equiv \hat{E}_{a_k} - \hat{E}_{a_{k-1}} = \hat{P}_{a_k}$

Llavors:

$$(**)\quad \boxed{\begin{array}{l}\hat{A}=\sum_{i=1}^{n} a_i \Delta\hat{E}_{a_i} \\ \sum_{i=1}^{n}\Delta\hat{E}_{a_i}=\hat{\mathbf{1}}\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\left\langle\vec{\mathbf{x}}\middle|\hat{A}\vec{\mathbf{y}}\right\rangle=\sum_i a_i\left\langle\vec{\mathbf{x}}\middle|\Delta\hat{E}_{a_i}\vec{\mathbf{y}}\right\rangle=\sum_i a_i\Delta\left\langle\vec{\mathbf{x}}\middle|\hat{E}_{a_i}\vec{\mathbf{y}}\right\rangle \\ \left\langle\vec{\mathbf{x}}\middle|\vec{\mathbf{y}}\right\rangle=\sum_i\left\langle\vec{\mathbf{x}}\middle|\Delta\hat{E}_{a_i}\vec{\mathbf{y}}\right\rangle=\sum_i\Delta\left\langle\vec{\mathbf{x}}\middle|\hat{E}_{a_i}\vec{\mathbf{y}}\right\rangle\end{array}}$$

Nota: $\left\langle\vec{\mathbf{x}}\middle|\hat{E}_{a_i}\vec{\mathbf{y}}\right\rangle\equiv\left\langle\vec{\mathbf{x}}\middle|\hat{E}_{a_i}\vec{\mathbf{y}}\right\rangle-\left\langle\vec{\mathbf{x}}\middle|\hat{E}_{a_{i-1}}\vec{\mathbf{y}}\right\rangle=\left\langle\vec{\mathbf{x}}\middle|\left(\hat{E}_{a_i}-\hat{E}_{a_{i-1}}\right)\vec{\mathbf{y}}\right\rangle=\left\langle\vec{\mathbf{x}}\middle|\Delta\hat{E}_{a_i}\vec{\mathbf{y}}\right\rangle$

- *Nou canvi de notació:*

Definim: $\hat{E}_\lambda\equiv\begin{cases}\hat{0} & \text{si } \lambda<a_1\\ \hat{E}_{a_k} & \text{si } a_k\le\lambda<a_{k+1}\,,\ \lambda\in\mathbb{I}\\ \mathbf{1} & \text{si } \lambda\ge a_n\end{cases}$

llavors, podem escriure les igualtats anteriors:

$$\boxed{\begin{array}{l}\left\langle\vec{\mathbf{x}}\middle|\hat{A}\vec{\mathbf{y}}\right\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda d\left\langle\vec{\mathbf{x}}\middle|E_\lambda\vec{\mathbf{y}}\right\rangle \\ \left\langle\vec{\mathbf{x}}\middle|\vec{\mathbf{y}}\right\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}d\left\langle\vec{\mathbf{x}}\middle|E_\lambda\vec{\mathbf{y}}\right\rangle\end{array}}\qquad\forall\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}$$

Nota: les integrals són del tipus Riemann-Stieljes:

CAS GENERAL. TEOREMA ESPECTRAL.

- *Definició:*
- *Teorema espectral:*
- *Exemple:*

ESPECTRE D'UN OPERADOR AUTOADJUNT.

- *Teorema:*
- *Definició:*

DEFINICIÓ D'UN OPERADOR AUTOADJUNT.

- *Teorema:*

- *Definició:*
- *Propietats de* $f\left(\hat{A}\right)$
- *Teoremes:*
- *Definició:*