# 1. ESPAIS PRE-HILBERTIANS.

- D'Ara en endavant només considerarem *espais vectorials sobre* $\mathbb{C}$.

**PRODUCTE ESCALAR HERMÍTIC POSITIU**

*Definició:* donat un espai vectorial $E$ (sobre $\Re$), un *producte escalar hermític* és una aplicació:

$$\begin{aligned} E \times E &\to \Re \\ (\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) &\mapsto (\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}}) \end{aligned}$$

amb les propietats

1. *linealitat* respecte la 2a variable: $(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{b}}') = (\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}}) + (\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}}')$
   $(\vec{\mathbf{a}} \mid \lambda\vec{\mathbf{b}}) = \lambda(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}}),\ \lambda \in \mathbb{C}$.

2. *"hermiticitat":* $(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}}) = (\vec{\mathbf{b}} \mid \vec{\mathbf{a}})^*$.

3. *positivitat:* $(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{a}}) > 0$, $\forall \vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ ($(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{a}})$ és òbviament real!!).

Conseqüències de la definició:

1. Antilinealitat respecte de la 1a variable

   $(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{a}}' \mid \vec{\mathbf{b}}) = (\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}}) + (\vec{\mathbf{a}}' \mid \vec{\mathbf{b}})$
   $(\lambda\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}}) = \lambda^*(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}}),\ \lambda \in \mathbb{C}$.

2. El producte escalar de $\vec{\mathbf{0}}$ amb qualsevol vector és $0$.

   $(\vec{\mathbf{0}} \mid \vec{\mathbf{a}}) = (\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{0}}) = 0$ (Demostració: considerem $(\vec{\mathbf{0}} + \vec{\mathbf{0}} \mid \vec{\mathbf{a}})$ i $(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{0}} + \vec{\mathbf{0}}) = 0$)

   Corol·lari: $(\vec{\mathbf{0}} \mid \vec{\mathbf{0}}) = 0$.

3. Si $(\vec{\mathbf{x}} \mid \vec{\mathbf{a}}) = (\vec{\mathbf{x}} \mid \vec{\mathbf{b}}),\ \forall \vec{\mathbf{x}} \in E \to \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}}$

   Demostració:
   - Considerem $(\vec{\mathbf{x}} \mid \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}) = (\vec{\mathbf{x}} \mid \vec{\mathbf{a}}) - (\vec{\mathbf{x}} \mid \vec{\mathbf{b}}) = 0$ (per hipòtesi) $\forall \vec{\mathbf{x}} \in E$.
   - Escollim: $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} \Rightarrow (\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} \mid \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}) = 0 \Rightarrow \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = 0$.

| |
|---|
| ESPAI PRE-HILBERTIÀ és un espai vectorial sobre $\mathbb{C}$ en el qual tenim definit un producte escalar hermític positiu. |

## MÒDUL D'UN VECTOR

- *Definició:* A tot espai pre-Hilbertià $E$ podem definir una aplicació

$$\begin{aligned} E &\to \mathbb{R} \\ \vec{\mathbf{a}} &\to +\sqrt{(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{a}})} \equiv \|\vec{\mathbf{a}}\| = \textit{mòdul} \text{ de } \vec{\mathbf{a}} \text{ (o } \textit{norma} \text{ de } \vec{\mathbf{a}}\text{).} \end{aligned}$$

Propietats:

1. $\|\vec{\mathbf{a}}\| > 0$, $\forall \vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{0}}$.
2. $\|\vec{\mathbf{0}}\| = 0$.
3. $\|\lambda\vec{\mathbf{a}}\| = |\lambda|\|\vec{\mathbf{a}}\|$.
4. $\|\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}\| \leq \|\vec{\mathbf{a}}\| + \|\vec{\mathbf{b}}\|$ *Desigualtat triangular*

- Nota: un espai vectorial (sense $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) amb una aplicació $\begin{aligned} E &\to R \\ \vec{\mathbf{a}} &\mapsto \|\vec{\mathbf{a}}\| \end{aligned}$ amb les quatre propietats anteriors és un *espai normat* i $\|\vec{\mathbf{a}}\|$ és la *"norma" de* $\vec{\mathbf{a}}$. Així, hem vist que tot espai pre-hilbertià és u espai normat. El recíproc no és, en general, cert: hi ha espais normats que no són pre-hilbertians, és a dir, no existeix producte escalar que indueixi la norma existent.

## DESIGUALTAT DE SCHWARTZ

Si $E$ és un espai pre-hilbertians, $\forall \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in E$ tenim

$$\boxed{\left|(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}})\right| \leq \|\vec{\mathbf{a}}\| \cdot \|\vec{\mathbf{b}}\|}$$

Demostració: Si $\vec{\mathbf{a}}$ o $\vec{\mathbf{b}}$ és $\vec{\mathbf{0}}$ la desigualtat es verifica trivialment.

Si $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ tenim $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ que $(\vec{\mathbf{a}} + \lambda\vec{\mathbf{b}} \mid \vec{\mathbf{a}} + \lambda\vec{\mathbf{b}}) \geq 0$.

$$\Rightarrow (\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{a}}) + \lambda(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}}) + \lambda^*(\vec{\mathbf{b}} \mid \vec{\mathbf{a}}) + \lambda\lambda^*(\vec{\mathbf{b}} \mid \vec{\mathbf{b}}) \geq 0, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

$$\Rightarrow \|\vec{\mathbf{a}}\|^2 + \lambda(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}}) + \lambda^*(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}})^* + |\lambda|^2\|\vec{\mathbf{b}}\| \geq 0, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Prenem $\lambda = -(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}})^* / \|\vec{\mathbf{b}}\|^2 \geq 0$.

$$\Rightarrow \|\vec{\mathbf{a}}\| = -\left|(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}})\right|^2 / \|\vec{\mathbf{b}}\|^2 \geq 0 \Rightarrow \left|(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}})\right|^2 \leq \|\vec{\mathbf{a}}\|\|\vec{\mathbf{b}}\| \text{ (q. e. d.).}$$

La igualtat es verifica si i només si els vectors $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ són proporcionals o si un d'ells és $\vec{\mathbf{0}}$ (demostració trivial).

## DESIGUALTAT TRIANGULAR (O DE MINKOWSKY)

Si $E$ és un espai pre-hilbertià, $\forall \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in E$ tenim:

$$\boxed{\left\|\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}\right\| \leq \left\|\vec{\mathbf{a}}\right\| + \left\|\vec{\mathbf{b}}\right\|}$$

Demostració:

$$\left\|\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}\right\|^2 = \left(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}} \mid \vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}\right) = \left(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{a}}\right) + \left(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}}\right) + \left(\vec{\mathbf{b}} \mid \vec{\mathbf{a}}\right) + \left(\vec{\mathbf{b}} \mid \vec{\mathbf{b}}\right) = \left\|\vec{\mathbf{a}}\right\|^2 + \left(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}}\right) + \left(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}}\right)^* + \left\|\vec{\mathbf{b}}\right\|^2 =$$

$$= \left\|\vec{\mathbf{a}}\right\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}}\right) + \left\|\vec{\mathbf{b}}\right\|^2 \underset{\substack{\downarrow \\ \mathrm{Re}\,z \leq |z|}}{\leq} \left\|\vec{\mathbf{a}}\right\|^2 + 2\left|\left(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}}\right)\right| + \left\|\vec{\mathbf{b}}\right\|^2 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Desigualtat} \\ \text{de Schwartz}}}{\leq} \left\|\vec{\mathbf{a}}\right\|^2 + 2\left\|\vec{\mathbf{a}}\right\|\left\|\vec{\mathbf{b}}\right\| + \left\|\vec{\mathbf{b}}\right\|^2 =$$

$$= \left(\left\|\vec{\mathbf{a}}\right\| + \left\|\vec{\mathbf{b}}\right\|\right)^2 \text{ (q. e. d.).}$$

## ORTOGONALITAT

*Definició:* direm que $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \left(\neq \vec{\mathbf{0}}\right)$ són *ortogonals* si i només si $\left(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}}\right) = 0$.

- Donat un conjunt *finit* de vectors linealment independents es sempre possible trobar un conjunt de vectors *ortonormals* (=ortogonals i de mòdul 1) que generen el mateix espai.

Demostració: (*Mètode de Gram-Schmidt*) donats $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ construïm:

$$\left.\begin{aligned}
&\vec{\mathbf{w}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_1 \\
&\vec{\mathbf{w}}_2 = \vec{\mathbf{v}}_2 - \frac{\left(\vec{\mathbf{w}}_1 \mid \vec{\mathbf{v}}_2\right)}{\left\|\vec{\mathbf{w}}_1\right\|^2}\vec{\mathbf{w}}_1 \\
&\vec{\mathbf{w}}_3 = \vec{\mathbf{v}}_3 - \frac{\left(\vec{\mathbf{w}}_1 \mid \vec{\mathbf{v}}_3\right)}{\left\|\vec{\mathbf{w}}_1\right\|^2}\vec{\mathbf{w}}_1 - \frac{\left(\vec{\mathbf{w}}_2 \mid \vec{\mathbf{v}}_3\right)}{\left\|\vec{\mathbf{w}}_2\right\|^2}\vec{\mathbf{w}}_2 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&\vec{\mathbf{w}}_n = \vec{\mathbf{v}}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\left(\vec{\mathbf{w}}_k \mid \vec{\mathbf{v}}_n\right)}{\left\|\vec{\mathbf{w}}_k\right\|^2}\vec{\mathbf{w}}_k
\end{aligned}\right\} \begin{aligned}
&\left(\vec{\mathbf{w}}_i \mid \vec{\mathbf{v}}_j\right) = 0 \text{ si } i \neq j \\
&\text{(demostració trivial per inducció).}
\end{aligned}$$

Llavors construïm $\vec{\mathbf{u}}_k = \vec{\mathbf{w}}_k / \left\|\vec{\mathbf{w}}_k\right\| \Rightarrow \left(\vec{\mathbf{u}}_k \mid \vec{\mathbf{u}}_l\right) = \delta_{kl}$.

Aquest procés de ortonormalització és òbviament generalitzable a sistemes *infinits numerables* de vectors linealment independents.

- $\boxed{\text{Així, tot espai pre-hilbertià de dimensió finita admet una base ortonormal.}}$

Si $\vec{\mathbf{u}}_1,\ldots,\vec{\mathbf{u}}_n$ és una base ortonormal d'un espai pre-hilbertià i tenim $\vec{\mathbf{a}} = a_i\vec{\mathbf{u}}_i$, $\vec{\mathbf{b}} = b_j\vec{\mathbf{u}}_j$ llavors $\left(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i$ ; $\|\vec{\mathbf{a}}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2}$ ; $\left|\sum_i a_i^* b_i\right| \le \sqrt{\sum_k |a_k|^2 \sum_l |b_l|^2}$ .

**NOTACIÓ DE DIRAC:**

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}} \equiv \underbrace{|\vec{\mathbf{a}}\rangle}_{\text{"ket"}}, \vec{\mathbf{b}} \equiv \underbrace{|\vec{\mathbf{b}}\rangle}_{\text{"ket"}}, \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} \equiv |\vec{\mathbf{a}}\rangle + |\vec{\mathbf{b}}\rangle; \lambda\vec{\mathbf{a}} = \lambda|\vec{\mathbf{a}}\rangle; \left(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{b}}\right) \equiv \underbrace{\langle\vec{\mathbf{a}}|\vec{\mathbf{b}}\rangle}_{\text{"bracket"}}}$$

# 2. TOPOLOGIA D'ESPAIS MÈTRICS.

*Motivació:* Volem donar sentit a les combinacions lineals *infinites* de vectors a espais pre-hilbertians de dimensió infinita. Algebraicament només estan definides les sumes *finites*. Per definir les sumes infinites (=sèries) es necessari disposar de la noció de *límit*. Per això necessitem, prèviament introduir el concepte de *distància*.

## DISTÀNCIA

*Definició:* Donat un conjunt qualsevol, $A$, direm que a $A$ hi ha definida una distància si $\forall x, y \in A$ definim un número *real*, $d(x, y)$, amb les propietats:

1. $d(x, y) = 0$ sí i només sí $x = y$.
2. $d(x, y) \le d(x,z) + d(y,z)$, $\forall x, y, z \in A$.

Conseqüències de la definició:

i) $d(x, y) > 0$ sí $x \ne y$.

Demostració: $0 = d(x,x) \le d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y)$

ii) $d(x, y) = d(y,x)$, $\forall x, y \in A$.

Demostració: $d(x, y) \le d(x,x) + d(y,x) = d(y,x)$
$d(y,x) \le d(y, y) + d(x, y) = d(x, y)$

**ESPAI MÈTRIC:** és un conjunt on hi ha definida una distància (Nota: *no* ha de ser necessàriament un *espai* vectorial).

Exemples:

1. A qualsevol, $d(x, y) \equiv \begin{cases} 1 & x \ne y \\ 0 & x = y \end{cases}$

2. ℐ, Z, Q, ℝ, $d(x, y) \equiv \begin{cases} x - y & x \ge y \\ y - x & x \le y \end{cases}$

3. $\mathbb{C}$, $d(z,z') \equiv |z - z'|$ (amb $|z| \equiv +\sqrt{zz^*}$ )

4. $C^0_{[a,b]}$: funcions contínues a $[a,b]$ (funcions complexes de variable real).

5. Tot espai pre-hilbertià amb $d(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) \equiv \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|$.

**ELEMENTS DE TOPOLOGIA D'ESPAIS MÈTRICS:** Sigui $\{A,d\}$ espai mètric

*Bola oberta:*

Definició: Donats $x \in A$, $r \in \mathbb{R}^+$ (número real positiu) definim "bola oberta de centre $x$ i radi $r$" com el conjunt d'elements, $y$, de $A$ que verifiquen $d(x,y) < r$.

$$B(x;r) \equiv \{y \mid y \in A \wedge d(x,y) < r\}$$

(Nota: amb $\leq$: bola tancada i amb $=$: esfera).

*Element interior*

Definició: $x \in A' \subset A$, $x$ és "element interior" a $A'$ si existeix alguna bola oberta $B(x;r) \subset A'$.

*Subconjunt obert:*

Definició: $A' \subset A$; $A'$ és un "subconjunt obert" de $A$ si tot element de $A'$ és interior a $A'$.

*Subconjunt tancat:*

Definició: $A' \subset A$; $A'$ és un "subconjunt tancat" de $A$ si $(A - A')$ és un subconjunt obert.

*Subconjunt dens a $A$:*

Definició: $A' \subset A$; $A'$ és "dens a $A$" si tot element de $A$ té un element de $A'$ tan pròxim com es vulgui ($\forall x \in A$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x' \in A' \mid d(x,x') < \varepsilon$).

**SUCCESSIONS CONVERGENTS** [$\{A,d\}$: espai mètric]

*Definició:* una successió $x_1, x_2, x_n, \ldots$ d'elements de $A$ es diu que *és convergent* cap a $x \in A$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M_{(\varepsilon)} \mid d(x_n, x) < \varepsilon$, $\forall n > M_{(\varepsilon)}$.

Escriurem: $\lim_{n \to \infty} x_n = x$

"$x_n$ s'acota a $x$ tant com es vulgui per $n$ suficientment gran".

*Teorema:* El límit d'una successió convergent és únic

Demostració:

$$\left.\begin{array}{l} x_n \to x \\ x_n \to y \end{array}\right\} \Rightarrow d(x,y) \le d(x,x_n) + d(y,x_n) < \varepsilon \ \underset{\substack{\text{per } n \text{ suficientment} \\ \text{gran.}}}{(\text{arbritari})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y.$$

*Teorema:* $[A' \subset A]$: $A'$ és dens a $A \Leftrightarrow$ tot element de $A$ és límit de qualsevol successió d' $A'$ (evident).

*Teorema:* $A' \subset A$ és un subconjunt tancat si i només si el límit de qualsevol successió convergent d'elements de $A'$ és també $A$.

$(\Rightarrow)$ $A'$ tancat; $\underset{x_i \in A'}{x_1, x_2, x_n, \ldots} \to x \Rightarrow x \in A'$ [Efectivament: si $x \notin A' \Rightarrow x \in A - A'$].

$\Rightarrow x$: interior a $A - A' \Rightarrow \exists$ bola oberta $B(x,\delta) \subset A - A' \Rightarrow B(x,x_n) \ge \delta$ (absurd!).

$(\Leftarrow)$ tota successió convergent de $A'$ té el límit dins $A' \Rightarrow A'$ tancat.

[Efectivament: si $A'$ no és tancat $\Rightarrow A - A'$ no és obert $\Rightarrow \exists y \in A - A'$ que no és interior a $A - A' \Rightarrow$ tota bola oberta $B(y,\delta)$ conté elements de $A' \Rightarrow$ podem construir successions d'elements de $A'$ que convergeixen cap a $y \in A - A'$.

## SUCCESSIONS DE CAUCHY

[$\{A,d\}$: espai mètric]

*Definició:* un espai mètric, $\{A,d\}$, és *complet* si tota successió de Cauchy és convergent.

*Exemples:*

1. A amb $d(x,y) \equiv \begin{cases} 1 & x \ne y \\ 0 & x = y \end{cases}$ és *complet.*

2. $\rceil$, Z amb $d(x,y) \equiv \begin{cases} x - y & x \ge y \\ y - x & x \le y \end{cases}$ són *complets.*

3. Q amb la distància anterior *no* és complet $\to$ $|$ és complet (és la completació de Q).

4. $|$, $d(z,z') \equiv |z - z'|$ és complet.

5. $C^0_{[a,b]}$, $d(f,g) = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$ és complet.

6. $\boxed{E: \text{espai pre-hilbertià amb } d(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) \equiv \|\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{y}}\| \text{ } \textit{potser complet o no.}}$

*Teorema:* tot espai mètric no complet és completable i la completació és única.

(No ho demostrarem, la demostració és similar a la construcció de $\mathbb{R}$ a partir de Q).

*Teoremes:* a) complet $\Rightarrow$ tancat (evident).

b) tot subconjunt tancat d'un espai mètric complet és complet.

# 3. ESPAIS DE HILBERT.

## ESPAI DE HILBERT

- *Definició:* un *espai de Hilbert* és un espai *pre-hilbertià complert.*
- *Exemple 1:* tot espai *pre-hilbertià* de *dimensió finita* és de Hilbert.

$\vec{\mathbf{x}}^{(n)}$ successió de Cauchy $\Rightarrow \left\|\vec{\mathbf{x}}^{(n)}-\vec{\mathbf{x}}^{(m)}\right\| \to 0$, base ortonormal $\vec{\mathbf{u}}_1 \ldots \vec{\mathbf{u}}_N$; $\vec{\mathbf{x}}^{(n)} \equiv \sum_{k=1}^{N} \vec{\mathbf{x}}_k^{(n)} \vec{\mathbf{u}}_k$.

- $\vec{\mathbf{x}}_k^{(n)}$, ($k$: fixat) és una successió de Cauchy de números complexes ($\Rightarrow$ convergent) a efecte:

$$\left|\vec{\mathbf{x}}^{(n)}-\vec{\mathbf{x}}^{(m)}\right| \le \left\{\sum_{k=1}^{N}\left|\vec{\mathbf{x}}^{(n)}-\vec{\mathbf{x}}^{(m)}\right|^2\right\}^{1/2} = \left\|\vec{\mathbf{x}}^{(n)}-\vec{\mathbf{x}}^{(m)}\right\| \to 0 .$$

- Sigui $x_k = \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}$ tenim que $\left|x_k - x_k^{(n)}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

- Construïm $\vec{\mathbf{x}} \equiv \sum_{k=1}^{N} x_k \vec{\mathbf{u}}_k$.

- La successió $\vec{\mathbf{x}}^{(n)}$ convergeix cap a $\vec{\mathbf{x}}$, en efecte:

$$\left\|\vec{\mathbf{x}}^{(n)}-\vec{\mathbf{x}}\right\| = \left\{\sum_{k=1}^{N}\left|\vec{\mathbf{x}}^{(n)}-\vec{\mathbf{x}}\right|^2\right\}^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

$\Rightarrow$ L'espai és *complet.*

- *Exemple 2:* Espai $\ell^2$ ="espai de les successions numèriques de quadrat absolutament sumable".

$$\ell^2 = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots),\ \lambda_k \in \mathbb{C},\ \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < +\infty .$$

→ A $\ell^2$ definim:

- Suma: $\boxed{(\lambda_k) + (\mu_k) = (\lambda_k + \mu_k)}$
- Producte per $\lambda$: $\boxed{\lambda(\lambda_k) = (\lambda\lambda_k)}$

Amb la suma i el producte per $\lambda \Rightarrow \boxed{\ell^2 \text{: espai vectorial}}$ (demostració trivial).

Les definicions són correctes.

$$\begin{cases} |\lambda_k + \mu_k|^2 \le 2|\lambda_k|^2 + |\mu_k|^2 \\ |\lambda\lambda_k|^2 = |\lambda|^2 |\lambda_k|^2 \end{cases} \quad (\Leftarrow |a+b|^2 + |a-b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2).$$

$\ell^2$ té dimensió infinita:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\mathbf{u}}_1 = (1,0,0,\ldots,0,\ldots) \\ \vec{\mathbf{u}}_2 = (0,1,0,\ldots,0,\ldots) \\ \vec{\mathbf{u}}_3 = (0,0,1,\ldots,0,\ldots) \\ \vdots \end{array}\right\} \vec{\mathbf{u}}_i \in \ell^2$$

són linealment independents amb un número finit no podem generar $\ell$ (si $\vec{\mathbf{u}}_1 \ldots \vec{\mathbf{u}}_N$ fos base; $\vec{\mathbf{u}}_{N+1} \neq$ combinació lineal de $\vec{\mathbf{u}}$).

→ A $\ell^2$ definim producte escalar:

$$\boxed{((\lambda_k)|(\mu_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^* \mu_k} \Rightarrow \boxed{\ell^2 \text{: espia pre-hilbertià}} \text{ (demostració trivial).}$$

La definició és correcta: $|\lambda_k^* \mu_k| = |\lambda_k^*||\mu_k| \underset{(|a|-|b|)^2 \ge 0}{\le} \frac{1}{2}\left(|\lambda_k^*|^2 + |\mu_k|^2\right)$.

$$\boxed{\|(\lambda_k)\| = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2\right\}^{1/2} < +\infty}$$

→ Sigui $x^{(n)} \equiv \left(\lambda_k^{(n)}\right)$ una successió de Cauchy d'elements de $\ell^2$.

$$\left\|\vec{\mathbf{x}}^{(n)} - \vec{\mathbf{x}}^{(m)}\right\| < \varepsilon,\ \forall n,m > M_\varepsilon$$

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|\lambda_k^{(n)} - \lambda_k^{(m)}\right|^2\right\}^{1/2} < \varepsilon,\ \forall n,m > M_\varepsilon$$

$\lambda_k^{(n)}$ ($k$: fixat) és una successió de Cauchy de números complexes ($\Rightarrow$convergent).

En efecte:

$$\left|\lambda_k^{(n)} - \lambda_k^{(m)}\right|^2 \le \sum_{j=1}^{\infty}\left|\lambda_k^{(n)} - \lambda_k^{(m)}\right|^2 = \left\|x^{(n)} - x^{(m)}\right\|^2 < \varepsilon^2,\ \forall n,m > M_\varepsilon.$$

Sigui $\lambda_k = \lim_{n\to\infty} \lambda_k^{(n)} \leftrightarrow \left|\lambda_k^{(n)} - \lambda_k\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Construïm $x \equiv \left(\lambda_k\right)$

Demostrem ara que $x = \lim x^{(n)}$ i que $x \in \ell^2$

Tenim:

$$\sum_{k=1}^{r}\left|\lambda_k^{(n)} - \lambda_k^{(m)}\right|^2 \le \sum_{j=1}^{\infty}\left|\lambda_k^{(n)} - \lambda_k^{(m)}\right|^2 = \left\|x^{(n)} - x^{(m)}\right\|^2 < \varepsilon^2,\ \forall n,m > M_\varepsilon,\ \forall r.$$

Prenem: $m \to \infty$ $\qquad \sum_{j=1}^{r}\left|\lambda_k - \lambda_k^{(n)}\right|^2 \le \varepsilon^2,\ \forall n > M_\varepsilon,\ \forall r.$

Prenem $r \to \infty$ $\qquad \sum_{j=1}^{\infty}\left|\lambda_k - \lambda_k^{(n)}\right|^2 \le \varepsilon^2,\ \forall n > M_\varepsilon.$

$$\Rightarrow \left\|x - x^{(n)}\right\|^2 < \varepsilon^2,\ \forall n > M_\varepsilon \Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}.$$

$\left(\lambda_k - \lambda_k^{(n)}\right) \in \ell^2$, també $\left(\lambda_k^{(n)}\right) \in \ell^2 \Rightarrow \left(\lambda_k\right) \in \ell^2$.

$\Rightarrow \ell^2$: és complet.

$\Rightarrow \ell^2$: espai de Hilbert de dimensió infinita.

- *Exemple 3:* Exemple d'un espai pre-hilbertià que *NO és de Hilbert.*

$C^0_{[a,b]}$ amb $(f \mid g) = \int_a^b f^* g dx$, *és un espai pre-hilbertià* (demostració virtual).

Considerem el cas concret $[a,b]=[-1,1]$, sigui $f_n(x)=\begin{cases}0 & x\in[-1,0]\\ nx & x\in[0,1/n]\\ 1 & x\in[1/n,1]\end{cases}$

$f_1(x), f_2(x),\ldots, f_n(x),\ldots$ és una *successió de Cauchy*, en efecte:

$$\|f_m-f_n\|^2=\int_{-1}^{+1}|f_m-f_n|dx \underset{\substack{\text{suposem}\\ m>n}}{=} \int_0^{1/m}(mx-nx)^2dx+\int_{1/m}^{1/n}(1-nx)^2dx=\frac{(n-m)}{3m^2n}\le\frac{m^2}{3m^2n}\underset{\substack{\text{per } m,n\\ \text{suficientment}\\ \text{grans}}}{<}\varepsilon$$

La successió $(f_n(x))$ *no* és convergent. Suposem que existeix $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$.

Tindríem $\|f_n-f\|^2=\int_{-1}^{+1}\|f_n(x)-f(x)\|^2dx\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Per altra banda: $\int_{-1}^{0}\|f_n(x)-f(x)\|^2dx\le\int_{-1}^{1}\|f_n(x)-f(x)\|^2dx$ i també $\int_{\varepsilon}^{1}\|f_n(x)-f(x)\|^2dx\le\int_{-1}^{1}\|f_n(x)-f(x)\|^2dx$, $\forall\varepsilon>0$, $\forall\varepsilon<1$.

Així doncs tenim:

$$\int_{-1}^{0}\underbrace{|f_n-f|^2}_{=0}dx\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\ \int_{\varepsilon}^{1}\underbrace{|f_n-f|^2}_{=1,\forall n>1/\varepsilon}dx=0,\ \forall\varepsilon.$$

Com que $f(x)$ hauria de ser contínua $\in C^0_{[-1,1]}$, això implica

- *Teorema:* Donades les successions convergents $\vec{\mathbf{x}}_n\to\vec{\mathbf{x}}$; $\vec{\mathbf{y}}_n\to\vec{\mathbf{y}}$ en un espai pre-hilbertià, $E$, tenim que:

  ∨ $\forall\vec{\mathbf{a}}\in E$, la successió $(\vec{\mathbf{a}}\,|\,\vec{\mathbf{x}}_n)$ convergeix cap a $(\vec{\mathbf{a}}\,|\,\vec{\mathbf{x}})$.

  ∨ La successió $(\vec{\mathbf{x}}_n\,|\,\vec{\mathbf{y}}_m)$ convergeix cap a $(\vec{\mathbf{x}}\,|\,\vec{\mathbf{y}})$.

Demostració:

a) $$|(\vec{\mathbf{a}}\,|\,\vec{\mathbf{x}}_n)-(\vec{\mathbf{a}}\,|\,\vec{\mathbf{x}})|=|(\vec{\mathbf{a}}\,|\,\vec{\mathbf{x}}_n-\vec{\mathbf{x}})|\underset{\substack{\text{desigualtat}\\ \text{de Schwartz}}}{\le}\|\vec{\mathbf{a}}\|\|\vec{\mathbf{x}}_n-\vec{\mathbf{x}}\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

b) $$|(\vec{\mathbf{x}}_n\,|\,\vec{\mathbf{y}}_m)-(\vec{\mathbf{x}}\,|\,\vec{\mathbf{y}})|\equiv|(\vec{\mathbf{x}}_n-\vec{\mathbf{x}}\,|\,\vec{\mathbf{y}}_m-\vec{\mathbf{y}})|+|(\vec{\mathbf{x}}_n-\vec{\mathbf{x}}\,|\,\vec{\mathbf{y}})|+|(\vec{\mathbf{x}}\,|\,\vec{\mathbf{y}}_m-\vec{\mathbf{y}})|\le$$
$$\underset{\substack{\text{desigualtat}\\ \text{traingular}}}{\le}|(\vec{\mathbf{x}}_n-\vec{\mathbf{x}}\,|\,\vec{\mathbf{y}}_m-\vec{\mathbf{y}})|+|(\vec{\mathbf{x}}_n-\vec{\mathbf{x}}\,|\,\vec{\mathbf{y}})|+|(\vec{\mathbf{x}}\,|\,\vec{\mathbf{y}}_m-\vec{\mathbf{y}})|\le$$

$$\underset{\substack{\text{desigualtat}\\ \text{de Schwartz}}}{\leq} \|\vec{\mathbf{x}}_n - \vec{\mathbf{x}}\|\|\vec{\mathbf{y}}_m - \vec{\mathbf{y}}\| + \|\vec{\mathbf{x}}_n - \vec{\mathbf{x}}\|\|\vec{\mathbf{y}}\| + \|\vec{\mathbf{x}}\|\|\vec{\mathbf{y}}_m - \vec{\mathbf{y}}\| \xrightarrow[\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}]{} \infty .$$

"Límit del producte escalar = producte escalar dels límits"

**BASE HILBERTIANA**

- *Definició:* Un *sistema de vectors* d'un espai de Hilbert es diu que es *ortogonal* si tots els vectors del sistema són ortogonals dos a dos. Si aquests vectors són, a més a més, de mòdul 1 direm que el sistema es *ortonormal.*

- *Definició:* Un *sistema de vectors* d'un espai de Hilbert es diu que és *total* si l'únic vector ortogonal a tots ells es el vector $\vec{\mathbf{0}}$.

- *Definició:* Un sistema de vectors d'un espai de Hilbert , es diu que constitueix una *base hilbertiana de* , si el sistema és *ortonormal, total i numerable.*

  *Exemples:*

  1. Pels espais de Hilbert de dimensió *finita* (=pre-hilbertians) aquesta definició coincideix amb la ja coneguda de base ortonormal.

     (=tota base ortonormal és evidentment total i numerable (per ser finita)).

  2. El sistema $\vec{\mathbf{u}}_i = \left(\lambda_k^{(i)}\right)$ amb $\lambda_k^{(i)} = \delta_{ik}$ de $\ell^2$ *és una base hilbertiana de* $\ell$.

     $$\vec{\mathbf{u}}_i = \left(0,0,\ldots,0,\overset{i}{1},0,\ldots\right).$$

     És ortonormal: $\left(\vec{\mathbf{u}}_i \mid \vec{\mathbf{u}}_j\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(i)*}\lambda_* = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_i\delta_k$ .

     És total si $\vec{\mathbf{a}} = (\mu_k)$ és $\perp \vec{\mathbf{u}}_i$, $\forall i \Rightarrow \left(\vec{\mathbf{u}}_i \mid \vec{\mathbf{a}}\right) = \sum_k \lambda_k^{(i)*}\mu_k = \sum_k \delta_{ik}\mu_k = \mu_i$.

     $$\Rightarrow \mu_i = 0,\ \forall i \Rightarrow \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}.$$

     És numerable $\{\vec{\mathbf{u}}_i\}$.

# 4. L'ESPAI $\square^2_{[a,b]}$.

**L'ESPAI $\square^2_{[a,b]}$**

- *Definició:* és l'espai de les funcions complexes (de variable real) de "quadrat absolutament sumable" a l'interval $[a,b]$.

$\int_a^b |f(x)|dx =$ existeix

- *Idea intuitiva de la Integral de Lebesgue*

  - Concepte de *mesura* d'un conjunt, $A$, de punts de l'interval $[a,b]$:

    "mesura exterior de $A$" $\equiv m_e(A) \equiv$ extrem inferior a la suma de les llargades de qualsevol conjunt d'intervals que cobreixen $A$

    *Exemples:* si $A=[c,d]\subset[a,b]\rightarrow m_e(A)=d-c$
    $A=[c,c]=1\,\text{punt}\rightarrow m_e(1\,\text{punt})=0$

    *Teorema:* la reunió d'un número finit o infinit numerable de conjunts de mesura nul·la és també de mesura nul·la (sense demostració).

    *Corol·laris:*

    1. Un número finit de punts té mesura nul·la.
    2. Un número infinit numerable de punts té mesura nul·la $\Rightarrow m_e\left[Q_{[a,b]}\right]$ (racionals de $[a,b]$).

    *Terminologia:* "quasi per tot arreu"="tot arreu excepte un conjunt de mesura nul·la".

  - Integral de Lebesgue comparada amb la Riemann

    - Integral de Riemann $\Re\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n}(\bar{x}_i)(x_{i+1}-x_i)$.

      L'existència del límit depèn del "bon comportament" de $f(x)$.

      En realitat tenim: "suma superior" (decreix quan $n\rightarrow\infty$) $\rightarrow \bar{\int}$.
      "suma inferior" (creix quan $n\rightarrow\infty$) $\rightarrow \underline{\int}$

      Si coincideixen existeix la integral.

      Exemple: $f(x)=\begin{cases}0 & x \text{ racional}\\ 1 & x \text{ irracional}\end{cases}\rightarrow$ no es integrable Riemann.

      $\bar{\int}=1$, $\underline{\int}=0$.

$$(\vec{\mathbf{x}}\,|\,\vec{\mathbf{y}})_H=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{\mathbf{e}}_i\,\middle|\,\sum_{j=1}^{n}y_j\vec{\mathbf{e}}_j\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^{n}x_i^*y_j\delta_{ij}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_i^*y_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}x_i^*y_i=\left(\left(x_i\right)|\left(y_i\right)\right)\ell^2,|^n.$$

| | |
|---|---|
| $,\approx\,\vert^n$ | dimensió finita |
| $,\approx\,\ell^2$ | dimensió infinita |

- *Corol·lari:* Si , és un espia de Hilbert *separable* de dimensió infinita, $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ base hilbertiana, , $\ni \vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \vec{\mathbf{e}}_i$ on $x_i = (\vec{\mathbf{e}}_i \mid \vec{\mathbf{x}}) \Rightarrow \boxed{\|\vec{\mathbf{x}}\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}$ *Igualtat de Parseval.*

- *Definició:* Un espai d Hilbert separable de dimensió infinita és un *"espai de Hilbert clàssic".*

*Notes sobre les bases hilbertianes:*

∨ Hem vist que si un sistema és ortonormal, numerable i total (=base hilbertiana) ⇒ la seva envoltura lineal és densa a , (=tot vector de , és el límit d'una successió de combinacions lineals finites dels $\vec{\mathbf{e}}_i$ 's de la base).

∨ El recíproc també és cert: Si un sistema $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n$ és ortonormal i numerable i la seva envoltura lineal és densa a , ⇒ El sistema és total (=base hilbertiana).

Demostració: sigui $\vec{\mathbf{x}} \perp \vec{\mathbf{e}}_i$, $\forall i$ per hipòtesi $\vec{\mathbf{x}} = \lim_{n\to\infty} \vec{\mathbf{x}}^{(n)}$ on $\vec{\mathbf{x}}^{(n)} \in \langle \{\vec{\mathbf{e}}_i\} \rangle$

$$\Rightarrow \vec{\mathbf{x}} \perp \vec{\mathbf{x}}^{(n)},\ \forall n \leftrightarrow \left(\vec{\mathbf{x}} \mid \vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right) = 0,\ \forall n \Rightarrow 0 = \lim\left(\vec{\mathbf{x}} \mid \vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right) =$$
$$= \left(\vec{\mathbf{x}} \mid \lim \vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right) = \left(\vec{\mathbf{x}} \mid \vec{\mathbf{x}}\right) = \|\vec{\mathbf{x}}\|^2 \Rightarrow \boxed{\vec{\mathbf{x}} = 0}$$

Així tenim 2 definicions alternatives (equivalents) de base hilbertiana.

$$\text{Base hilbertiana} = \begin{cases} \text{sistema ortonormal, numerble, total} \\ \\ \text{sistema ortonormal, numerable, amb envoltura linela densa a H} \end{cases}$$

*Exemples de bases hilbertianes de* $\square^2_{[a,b]}$*:*

*1) Polinomis de Legendre:*

$\square^2_{[-1,1]}$, considerem el sistema $f_n(x) \equiv x^n \quad (n = 0,1,2,\ldots)$

- És linealment. Independent.
- No és ortonormal.

$\{f_n\} \xrightarrow{\text{Gram Schmidt}} \{\varphi_n\}$: base hilbertiana de $\square^2_{[-1,1]}$

$$\boxed{\varphi_n = \sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n(x)} \text{ on } \boxed{P_n(x) \equiv \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n}$$

*2) Polinomis d'Hermite*

$\square^2_{[-\infty,\infty]}$, considerem $f_n(x) \equiv x^n e^{-x^2/2}$

- És linealment. Independent.
- No és ortonormal.

$\{f_n\} \xrightarrow{\text{Gram Schmidt}} \{\varphi_n\}$: base hilbertiana de $\square^2_{[-\infty,\infty]}$

$$\boxed{\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n!2_n\sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} H_n(x)} \text{ on } \boxed{H_n(x) \equiv (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}}$$

*3) Polinomis de Laguerre*

$\square^2_{[0,\infty]}$, considerem $f_n(x) \equiv x^n e^{-x^2/2}$

- És linealment. Independent.
- No és ortonormal.

$\{f_n\} \xrightarrow{\text{Gram Schmidt}} \{\varphi_n\}$: base hilbertiana de $\square^2_{[0,\infty]}$

$$\boxed{\varphi_n = e^{-x^2/2} L_n(x)} \text{ on } \boxed{L_n(x) \equiv \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2} x^n\right)}$$

*4) Sèries de Fourier*

$\square^2_{[0,2\pi]}$, definició: $\boxed{\varphi_{\pm n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm inx}}$

- És una base hilbertiana.

*En tots els casos:*

$$\psi \in \square^2;\ \psi = \sum_n a_n \varphi_n \to a_n = \int_a^b \varphi_n^* \psi dx \qquad \sum |a_n|^2 = \int_a^b |\psi| dx$$

$\psi = \sum_n a_n \varphi_n$ : sèrie ($\sum$ fites en el sentit "mitja quadràtica").

$$\boxed{\begin{aligned}&\psi(x)=|\psi\rangle\\&\langle\psi|=\int dx\psi^*(x)[\ ]\\&\langle\psi|\phi\rangle=\int dx\psi^*(x)\phi(x)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\sum_n|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|=\mathbf{1}\Leftrightarrow\sum_n\varphi_n(x)\varphi_n^*(x')=\delta(x-x')}$$

$$\boxed{|\psi\rangle=\sum_n|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\psi\rangle=\sum_n\varphi_n(x)\int dx'\varphi^*(x')\psi(x')=\psi(x)}$$

## TEOREMES IMPORTANTS

- *Definició:* sigui $M$ subespai de , (espai de Hilbert); definim $M^\perp=\{\vec{\mathbf{x}}\,|\,\vec{\mathbf{x}}\in H,\vec{\mathbf{x}}\perp\text{tot vector de }M\}$.

  $M^\perp$ és tancat (encara que $M$ no ho sigui).

$$\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\to\vec{\mathbf{x}}$$
$$\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\in M^\perp\Rightarrow\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\,|\,\vec{\mathbf{y}}\right)=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\,|\,\vec{\mathbf{y}}\right)=\left(\lim_{n\to\infty}\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\,|\,\vec{\mathbf{y}}\right)=\vec{\mathbf{x}},\ \vec{\mathbf{y}}\in M$$
$$\Rightarrow\boxed{\vec{\mathbf{x}}\in M^\perp}$$

- *Teorema de la mínima distància:*

$$\boxed{\begin{array}{l}M\text{ subespai }\textit{tancat}\text{ de , (espai de Hilbert); }\vec{\mathbf{a}}\in H;\ d=\inf_{\vec{\mathbf{x}}\in M}\|\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{x}}\|\Rightarrow\exists\text{ un vector}\\ \vec{\mathbf{x}}_0\in M\text{ (i només un) tal que }\|\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{x}}_0\|=d.\end{array}}$$

Per ser $d=\inf_{\vec{\mathbf{x}}\in M}\|\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{x}}\|\Rightarrow\exists$, existeix una successió $\underbrace{\vec{\mathbf{x}}^{(n)}}_{\in M}$ tal que $\|\vec{\mathbf{x}}^{(n)}-\vec{\mathbf{a}}\|\xrightarrow[n\to\infty]{}d$ .

"Paral·lelogram":

$$\left\|\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}-\vec{\mathbf{a}}\right)-\left(\vec{\mathbf{x}}^{(m)}-\vec{\mathbf{a}}\right)\right\|^2+\underbrace{\left\|\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}-\vec{\mathbf{a}}\right)-\left(\vec{\mathbf{x}}^{(m)}-\vec{\mathbf{a}}\right)\right\|^2}_{\left\|\vec{\mathbf{x}}^{(n)}+\vec{\mathbf{x}}^{(m)}-2a\right\|^2}=2\left\|\vec{\mathbf{x}}^{(n)}-\vec{\mathbf{a}}\right\|^2+2\left\|\vec{\mathbf{x}}^{(m)}-\vec{\mathbf{a}}\right\|^2$$

$$\Rightarrow\left\|\vec{\mathbf{x}}^{(n)}-\vec{\mathbf{x}}^{(m)}\right\|^2=2\left\|\vec{\mathbf{x}}^{(n)}-\vec{\mathbf{a}}\right\|^2+2\left\|\vec{\mathbf{x}}^{(m)}-\vec{\mathbf{a}}\right\|^2-4\underbrace{\left\|\frac{\vec{\mathbf{x}}^{(n)}+\vec{\mathbf{x}}^{(m)}}{2}\right\|}_{\geq d^2}\leq$$

$$\leq=2\underbrace{\left\|\vec{\mathbf{x}}^{(n)}-\vec{\mathbf{a}}\right\|^2}_{d^2}+2\underbrace{\left\|\vec{\mathbf{x}}^{(m)}-\vec{\mathbf{a}}\right\|^2}_{d^2}-4d^2\xrightarrow[n,m\to\infty]{}0.$$

Cauchy $\Rightarrow$ Convergent $\Rightarrow\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\to\underbrace{\vec{\mathbf{x}}_0}_{\in M\text{ (tancat)}}$ és el vector buscat.

$$\|\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{x}}_0\|^2=(\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{x}}_0\mid\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{x}}_0)=\left(\lim_{n\to\infty}\left(\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)\mid\lim_{n\to\infty}\left(\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\mid\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)=\left\|\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right\|^2=d^2.$$

$\boxed{\vec{\mathbf{x}}_0 \text{ és únic}}$; suposem existeix $\vec{\mathbf{x}}_0'$

"Paral·lelogram": $\|\vec{\mathbf{x}}_0-\vec{\mathbf{x}}_0'\|^2=2\underbrace{\|\vec{\mathbf{x}}_0-\vec{\mathbf{a}}\|^2}_{=d^2}+2\underbrace{\|\vec{\mathbf{x}}_0'-\vec{\mathbf{a}}\|^2}_{=d^2}-4\underbrace{\left\|\frac{\vec{\mathbf{x}}_0+\vec{\mathbf{x}}_0'}{2}-\vec{\mathbf{a}}\right\|^2}_{\geq d^2}\leq 0.$

*Nota:* el vector $\vec{\mathbf{x}}_0$ l'hi direm "projecció de $\vec{\mathbf{a}}$ sobre $M$".

- *Teorema de la projecció ortogonal*

$M$ subespai *tancat* de , (Hilbert) $\Rightarrow$ , $= M\oplus M^{\perp}$

$\forall\vec{\mathbf{a}}\in$, busquem $\vec{\mathbf{x}}_0\in M\mid\|\vec{\mathbf{x}}_0-\vec{\mathbf{a}}\|=\inf_{\vec{\mathbf{x}}\in M}\|\vec{\mathbf{x}}_0-\vec{\mathbf{a}}\|=0$.

Sigui $\vec{\mathbf{a}}\equiv\underbrace{\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{x}}_0}_{?}+\underbrace{\vec{\mathbf{x}}_0}_{\in M}$.

$$\forall\vec{\mathbf{y}}\in M:\ d^2\leq\left\|\vec{\mathbf{a}}-\underbrace{\vec{\mathbf{x}}_0-\lambda\vec{\mathbf{y}}}_{M}\right\|^2=d^2+|\lambda|^2\|\vec{\mathbf{y}}\|^2-2\operatorname{Re}(\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{x}}_0\mid\lambda),\ \forall\lambda.$$
$$\Rightarrow 2\operatorname{Re}\lambda(\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{x}}_0\mid\vec{\mathbf{y}})\leq|\lambda|^2\|\vec{\mathbf{y}}\|^2,\ \forall\lambda.$$
$$\Rightarrow\lambda=\frac{(\vec{\mathbf{y}}\mid\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{x}}_0)}{\|\vec{\mathbf{y}}\|^2}\Rightarrow(\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{x}}_0\mid\vec{\mathbf{y}})=0,\ \forall\vec{\mathbf{y}}\in M.$$
$$\Rightarrow\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{x}}_0\in M^{\perp},$$

$\forall\vec{\mathbf{a}}\in$,: $\vec{\mathbf{a}}=\underbrace{\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{x}}_0}_{\in M^{\perp}}+\underbrace{\vec{\mathbf{x}}_0}_{\in M}\Rightarrow\boxed{,M+M^{\perp}}\Rightarrow\boxed{,M\oplus M^{\perp}}$, ja que $M\cap M^{\perp}=\{\vec{\mathbf{0}}\}$.

## FORMES CONTÍNUES D'UN ESPAI DE HILBERT

- *Definició:* donat un espai de Hilbert , direm que $\omega$ és una *forma* (o *funcional lineal*) de , si $\omega$ assigna a cada vector $\vec{\mathbf{x}}_0\in$, un número complex $\omega(\vec{\mathbf{x}})$ verificant-se:

  - $\omega(\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}})=\omega(\vec{\mathbf{x}})+\omega(\vec{\mathbf{y}}),\qquad\forall\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}\in,$
  - $\omega(\lambda\vec{\mathbf{x}})=\lambda\omega(\vec{\mathbf{x}}),\qquad\forall\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}\in,,\ \forall\lambda\in|$

- *Teorema:* el conjunt de les formes de , té estructura d'espai vectorial amb les operacions:

  - $(\omega+\omega')(\vec{\mathbf{x}})=\omega(\vec{\mathbf{x}})+\omega'(\vec{\mathbf{y}})$
  - $(\lambda\omega)(\vec{\mathbf{x}})=\lambda\omega(\vec{\mathbf{x}})$

  (demostració trivial) $\rightarrow$ Espai dual algebraic: ,N.

- *Definició:* Una forma de , es diu que és *contínua* si donada una successió convergent de vectors de ,: $\vec{\mathbf{x}}_n\rightarrow\vec{\mathbf{x}}$ es verifica que la successió numèrica $\omega(\vec{\mathbf{x}}_n)\rightarrow\omega(\vec{\mathbf{x}})$.

$$\boxed{\omega(\lim\vec{\mathbf{x}}_n)=\omega(\lim\vec{\mathbf{x}})}$$

  Nota: no tota forma d'un espai de Hilbert , és contínua.

- *Definició: Espai dual* d'un espai de Hilbert , és l'espai de les seves *formes contínues*: , $^*$ .

- *Teorema:* Tota forma bilineal d'un espai de Hilbert , de dimensió *finita* és *contínua* (es a dir: dim , = finita $\Rightarrow$ , $^*$ = ,N).

$\vec{\mathbf{x}}^{(n)}$ = successió convergent de ,: $\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\rightarrow\vec{\mathbf{x}}$.

$$\vec{\mathbf{e}}_1,\ldots,\vec{\mathbf{e}}_N \text{ base de ,:}\quad \left.\begin{array}{l}\vec{\mathbf{x}}^{(n)}=\sum_1^N\vec{\mathbf{x}}_k^{(n)}\vec{\mathbf{e}}_k\\ \vec{\mathbf{x}}=\sum_1^N\vec{\mathbf{x}}_k\vec{\mathbf{e}}_k\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{\mathbf{x}}_k^{(n)}\rightarrow\vec{\mathbf{x}}_k$$

$\omega$ forma de ,

$$\omega\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)=\omega\left(\sum_{i=1}^N\vec{\mathbf{x}}_i^{(n)}\vec{\mathbf{e}}_i\right)=\sum_{i=1}^N\vec{\mathbf{x}}_i^{(n)}(\vec{\mathbf{e}}_i)$$

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\omega\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)=\lim_{n\rightarrow\infty}\left(\sum_{i=1}^N\vec{\mathbf{x}}_i^{(n)}\omega(\vec{\mathbf{e}}_i)\right)=\sum_{i=1}^N\left(\lim_{n\rightarrow\infty}\vec{\mathbf{x}}_i^{(n)}\right)\omega(\vec{\mathbf{e}}_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^N\vec{\mathbf{x}}_i\omega(\vec{\mathbf{e}}_i)=\omega\underbrace{\left(\sum_{i=1}^N\vec{\mathbf{x}}_i\vec{\mathbf{e}}_i\right)}_{\text{númerocomplex}}=\omega(\vec{\mathbf{x}})=\omega\left(\vec{\mathbf{x}}_i^{(n)}\right)\text{ (q. e. d.).}$$

$\boxed{\text{No tot espai de Hilbert , (de dimensió infinita) admet una base pre-hilbertiana.}}$

## ESPAI DE HILBERT SEPARABLE

- *Definició:* Un espai de Hilbert , és *separable* si admet una base hilbertiana.

  Exemples:

  - Tot espai de *Hilbert* , de *dimensió finita* és *separable.*
  - $\ell^2$ és un espai de Hilbert , *separable.*

- *Teorema: ,: espai de Hilbert separable,* $\vec{\mathbf{e}}_1,\ldots,\vec{\mathbf{e}}_N,\ldots$ base hilbertiana de $,\Rightarrow \forall \vec{\mathbf{x}} \in ,$:

$$\boxed{\vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \vec{\mathbf{e}}_i \text{ on } x_i = \left(\vec{\mathbf{e}}_i \mid \vec{\mathbf{x}}\right)}$$

  - Calculem els números $\boxed{\left(\vec{\mathbf{e}}_i \mid \vec{\mathbf{x}}\right) = x_i}$.

    Aquests números verifiquen $\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty}$, en efecte

$$0 \le \left\| \vec{\mathbf{x}} - \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\mathbf{e}}_i \right\|^2 = \|\vec{\mathbf{x}}\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 - \underbrace{\left( \vec{\mathbf{x}} \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\mathbf{e}}_i \right)}_{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} - \underbrace{\left( \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\mathbf{e}}_i \middle| \vec{\mathbf{x}} \right)}_{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \ \forall n .$$

$$= \|\vec{\mathbf{x}}\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 .$$

    es a dir: $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \le \|\vec{\mathbf{x}}\|^2$, $\forall n \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \le \|\vec{\mathbf{x}}\|^2 < +\infty}$ $\boxed{\text{Desigualtat de Bessel}}$

    La vàlida de Bessel és vàlida a tot espai pre-hilbertià on $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$: sistema ortonormal.

  - Construïm $\boxed{\vec{\mathbf{y}} \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\mathbf{e}}_i}$

    Y existeix!

    Definició: $\vec{\mathbf{y}}_{(n)} \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\mathbf{e}}_i$ ; $\left(\vec{\mathbf{y}}_{(n)}\right)$ és una successió de Cauchy ja que:

$$\left\| \vec{\mathbf{y}}_{(n)} - \vec{\mathbf{y}}_{(m)} \right\| = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} x_i \vec{\mathbf{e}}_i \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n} |x_i|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

    per ser , de Hilbert ja convergeix i el seu límit és $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \vec{\mathbf{e}}_i \equiv \vec{\mathbf{y}}$

$$\Rightarrow \vec{\mathbf{y}} \in ,.$$

$\vee \quad \vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{x}}$

$$x_i \equiv (\vec{\mathbf{e}}_i \mid \vec{\mathbf{x}})$$

$$(\vec{\mathbf{e}}_i \mid \vec{\mathbf{y}}) = \left( \vec{\mathbf{e}}_i \middle| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{\mathbf{e}}_j \right) = \lim_{n\to\infty} \left( \vec{\mathbf{e}}_i \middle| \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{\mathbf{e}}_j \right) = \lim_{n\to\infty} x_j = x$$

$$\Rightarrow (\vec{\mathbf{e}}_i \mid \vec{\mathbf{x}}) = \left( \vec{\mathbf{e}}_i \middle| \vec{\mathbf{y}} - \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{\mathbf{e}}_j \right) \Leftrightarrow (\vec{\mathbf{e}}_i \mid \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}) = 0, \ \forall i$$

$$\Rightarrow \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}} = 0, \ \{\vec{\mathbf{e}}_i\} \text{ és total } \Rightarrow \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}}$$

$\boxed{\Rightarrow \vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{\infty} (\vec{\mathbf{e}}_i \mid \vec{\mathbf{x}}) \vec{\mathbf{e}}_i}$, $x_i \equiv (\vec{\mathbf{e}}_i \mid \vec{\mathbf{x}})$ són les *components* de $x$ a la base hilbertiana de $\vec{\mathbf{e}}_i$.

Notem que el teorema anterior estableix una correspondència biunívoca entre vectors d'un espai de Hilbert *separable* de dimensió infinita i successions de quadrat absolutament sumable (=vectors de $\ell^2$).

Si , és de dimensió finita, el teorema anterior és trivial i evidentment tenim una correspondència biunívoca entre els vectors de , i els $n-$plans de $|^n$.

Així doncs

, de dimensió finita $\quad ,\leftrightarrow |^n$

, de dimensió infinita $\quad ,\leftrightarrow \ell^2$

*Correspondència biunívoca.*

A més a més, la correspondència és *lineal* ja que

$$\begin{aligned}
&,\to |^n \ (\ell^2) \\
&\vec{\mathbf{x}} \to ((\vec{\mathbf{e}}_i \mid \vec{\mathbf{x}})) \equiv \vec{\mathbf{x}}_i \\
&\vec{\mathbf{y}} \to ((\vec{\mathbf{e}}_i \mid \vec{\mathbf{y}})) \equiv \vec{\mathbf{y}}_i \\
&\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} \to ((\vec{\mathbf{e}}_i \mid \vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}})) = ((\vec{\mathbf{e}}_i \mid \vec{\mathbf{x}}) + (\vec{\mathbf{e}}_i \mid \vec{\mathbf{y}})) = \\
&\qquad\qquad = ((\vec{\mathbf{e}}_i \mid \vec{\mathbf{x}})) + ((\vec{\mathbf{e}}_i \mid \vec{\mathbf{y}})) = (\vec{\mathbf{x}}_i) + (\vec{\mathbf{y}}_i) \\
&\lambda\vec{\mathbf{x}} \to ((\vec{\mathbf{e}}_i \mid \lambda\vec{\mathbf{x}})) = (\lambda(\vec{\mathbf{e}}_i \mid \vec{\mathbf{x}})) = \lambda((\vec{\mathbf{e}}_i \mid \vec{\mathbf{x}})) = \lambda(\vec{\mathbf{x}}_i).
\end{aligned}$$

- *Definició:* Dos espai de Hilbert , i ,N es diu que són *isomorfs* si ho són en el sentit algebraic (existeix correspondència biunívoca i lineal) i l'*isomorfisme algebraic conserva el producte escalar* ($\Rightarrow$producte escalar d'originals=producte escalar d'imatges).

- *Teorema:* Si , és espai de *Hilbert separable.*

$$,\approx |^{n} \quad \text{si } \dim ,= n$$
$$,\approx \ell^{2} \quad \text{si } \dim ,= \infty$$

Ja hem vist que donada una base hilbertiana $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ de , (finita o infinita) la correspondència $\vec{\mathbf{x}} \to ((\vec{\mathbf{e}}_i \mid \vec{\mathbf{x}}))$ és un isomorfisme algebraic. Falta comprovar que conserva el producte escalar.

$$\vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{\infty,n} \underbrace{(\vec{\mathbf{e}}_i \mid \vec{\mathbf{x}})}_{x_i} \vec{\mathbf{e}}_i \ , \ \vec{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{\infty,n} \underbrace{(\vec{\mathbf{e}}_i \mid \vec{\mathbf{y}})}_{y_i} \vec{\mathbf{e}}_i$$

- Integral de Lebesgue

$$\square \int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \bar{y}_i \qquad m_e\left(f_{[a,b]}^{-1}[y_{i+1}, y_1]\right).$$

L'existència del límit depèn de la "mesurabilitat" de $f^{-1}[y_{i+1}, y_1]$.

Exemple: la funció $f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ racional} \\ 1 & x \text{ irracional} \end{cases}$ és integral Lebesgue.

- *Teorema:* Si $f$ és integrable Riemann a $[a,b] \Rightarrow f$ és integrable Lebesgue a $[a,b]$ i $\square \int_a^b f dx = \Re \int_a^b f dx$ (no ho demostrarem).

La integral de Lebesgue permet:

- ∨ Integrar funcions no integrables Riemann.
- ∨ Integrar funcions definides sobre conjunts abstractes (sempre que es pugui definir una "mesura").

- *Teorema:* si $f = 0$ quasi per tot arreu $\int_a^b f = 0$ (evident).

- *Corol·lari:* Si $f(x) = g(x)$ quasi per tot arreu $\int_a^b f = \int_a^b g$.

- ∨ Considerem el conjunt de funcions per les que $\square \int_a^b |f|^2$ existeix.
- ∨ La relació "$f = g$ quasi per tot arreu" és d'equivalència $\to$ Construïm el *conjunt quocient* (= conjunt de les classes de equivalència) = conjunt de les

classes de funcions que difereixen en un conjunt de mesura nul·la (i tenen per tant, una integral comú).

$\square^2_{[a,b]}$: els sues elements són "classes de funcions" (cada classe conté com a màxim una funció contínua).

- *Teoremes:*

a) $\square^2_{[a,b]}$ és un espai vectorial respecte la suma i producte per un número complex (és un espai sobre $\mathbb{C}$ de dimensió infinita).

b) $\square^2_{[a,b]}$ és un espai pre-hilbertià respecte el producte escalar

$$(f \mid g) \equiv \square \int_a^b f^* g dx \quad \text{(notem: } \int_a^b |f|^2 \to f = 0 \text{ (classe } 0\text{))}.$$

- *Teorema de Fischer-Riesz:* $\square^2_{[a,b]}$ és complet ($\Rightarrow$ És espai de Hilbert). (És la completació de $C^0_{[a,b]}$) (no ho demostrem).

- *Teorema de Riesz-Fréchét:*

Hi ha una correspondència biunívoca i multilineal entre vectors i formes contínues.

$$\text{Nota: antilineal significa} \begin{cases} a \to a' \\ b \to b' \\ a + b \to a' + b' \\ \lambda a \to \lambda^* a' \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

Demostració:

a) $\vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{E} \to$ l'hi associem $\omega_{\vec{\mathbf{x}}} = (\vec{\mathbf{x}} | \ )$, que és una forma contínua. (la correspondència és, òbviament, antilineal).

b) $\omega \in \mathcal{E}^*$: 2 possibilitats:

1. $\omega = 0 \Rightarrow$ l'hi associem el vector $\vec{\mathbf{0}}$, ja que: $0 = (\vec{\mathbf{0}} | \ )$

2. $\omega \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}(\omega)$ és un *subespai tancat* ($\neq \mathcal{E}$):

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\mathbf{x}}^{(n)} \in \mathrm{Ker}(\omega) \\ \vec{\mathbf{x}}^{(n)} \to \vec{\mathbf{x}} \end{array}\right\} \to \vec{\mathbf{x}} \in \mathrm{Ker}(\omega) \text{ per ser } \omega \text{ contínua.}$$

$$\text{Considerem } \left.\begin{array}{l}\vec{\mathbf{e}} \in \operatorname{Ker}(\omega)^{\perp} \\ \|\vec{\mathbf{e}}\| \to \vec{\mathbf{x}}\end{array}\right\} \to \omega(\vec{\mathbf{e}}) \equiv \lambda \underset{\vec{\mathbf{e}} \notin \operatorname{Ker}(\omega)}{\neq} 0 .$$

$$\forall \vec{\mathbf{x}} \in ,: \ \vec{\mathbf{x}} = \underbrace{\vec{\mathbf{x}} - \frac{\omega(\vec{\mathbf{x}})}{|\lambda|^2}\lambda^* \vec{\mathbf{e}}}_{\substack{\in \operatorname{Ker}(\omega) \\ (\text{aplicació } \omega)}} + \underbrace{\frac{\omega(\vec{\mathbf{x}})}{|\lambda|^2}\lambda^* \vec{\mathbf{e}}}_{\in \operatorname{Ker}(\omega)^{\perp}}$$

$$\Rightarrow \left(\lambda^* \vec{\mathbf{e}} \,|\, \vec{\mathbf{x}}\right) = \left(\lambda^* \vec{\mathbf{e}} \,\middle|\, \frac{\omega(\vec{\mathbf{x}})}{|\lambda|^2}\lambda^* \vec{\mathbf{e}}\right) = \omega(\vec{\mathbf{x}}), \ \forall \vec{\mathbf{x}} .$$

$$\Rightarrow \omega = \left(\lambda^* \vec{\mathbf{e}} \,|\, \right)$$

la correspondència $\vec{\mathbf{a}} \leftrightarrow (\vec{\mathbf{a}} \,|\, )$ és òbviament antilineal $\begin{cases}(\vec{\mathbf{a}} \,|\, \vec{\mathbf{b}}) = (\vec{\mathbf{a}} \,|\, ) + (\vec{\mathbf{a}} \,|\, ) \\ (\alpha \vec{\mathbf{a}} \,|\, ) = \alpha^* (\vec{\mathbf{a}} \,|\, )\end{cases}$.

- *Notació de Dirac:*

| | |
|---|---|
| $\vec{\mathbf{x}} \to \|x\rangle$ | "ket" |
| $(\vec{\mathbf{x}} \,|\, ) \to \langle x\|$ | "bra" |
| $(\vec{\mathbf{x}} \,|\, \vec{\mathbf{y}}) \to \langle x \| y\rangle$ | "bracket" |

$$\boxed{\begin{array}{l}|x\rangle \to \langle x| \\ |x\rangle + |y\rangle \to \langle y| + \langle y| \\ (|x\rangle \to \alpha^* \langle x|\end{array}}$$

"Hi ha una correspondència biunívoca i antilineal entre "bra's" i "ket's"".

## BASES HILBERTIANES DE $\square^2_{[a,b]}$

- *Teorema (Stone-Weierstrass) :* Tota funció contínua a un *interval tancat* és aproximable *uniformement* per un polinomi:

  - ∨ També per mitja quadràtica.

  - ∨ També puntualment.

$f$ contínua $[a,b]$; $\exists P(x)$ $\boxed{\max_{[a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon}$ arbitrari

$$\boxed{\Rightarrow \left\{\int_a^b |f(x) - P(x)| dx\right\}^{1/2} < \varepsilon \sqrt{b-a}}$$

$f(x) - P(x) < \varepsilon$, $\forall x \in [a,b]$ (no ho demostrarem).

$$\boxed{\text{El conjunt dels polinomis es dens a } C^0_{[a,b]} \text{ (uniformement i és mitja quadràtica).}}$$

- *Teorema:* tota funció $f \in \square^2_{[a,b]}$ és aproximable en *mitja quadràtica* per una funció contínua a $[a,b]$

$$f \in \square^2_{[a,b]};\ \exists\ \tilde{f} \in C^0_{[a,b]}: \Rightarrow \left\{\int_a^b \left|f - \tilde{f}\right| dx\right\}^{1/2} < \varepsilon$$

(Això és el teorema de Fischer-Riesz.).

$\boxed{C^0_{[a,b]} \text{ és dens a } \square^2_{[a,b]} \text{ (en mitja quadràtica)}}$ (no ho demostrarem).

$\Rightarrow \{\text{Polinomis}\}$ és dens a $\square^2_{[a,b]}$ en mitja quadràtica

$\Rightarrow$ ortonormalitzant $1, x, x^2, x^3, \ldots \Rightarrow$ base hilbertiana de $\square^2_{[a,b]} \Rightarrow \boxed{\square^2_{[a,b]} \text{ és separable.}}$

Exemple: $\square^2_{[-1,1]} \rightarrow$ *Polinomis de Legendre*

- *Teorema:* Sigui $\rho(x)$ una funció acotada amb les propietats $\begin{cases} \rho(x) \geq 0 & \text{a tot R} \\ \exists \alpha > 0 & \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) e^{\alpha|x|} dx = \text{finit} \end{cases} \Rightarrow x^n \sqrt{\rho} \in \square^2$.

Si $\varphi_n(x)$ són les funcions ortonormals obtingudes de $x^n \sqrt{\rho}$ pel mètode de Gram Schmidt.

$\Rightarrow$ les funcions $\{\varphi_n(x)\}$ són una base hilbertiana de $\square^2_{[\text{de } \rho]}$ (no ho demostrarem).

- *Alternativa:* Teorema de Riesz-Fréchét per espais de Hilbert *separables* (no utilitza els teoremes de la "mínima distància" ni de la "projecció ortogonal"):

Teorema

$$\left.\begin{array}{l} H \text{ separable} \\ \omega \text{ forma contínua} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \tilde{z} \in, \text{ tal que } \omega = \langle \tilde{z} |.$$

Sigui $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \ldots\}$ una base hilbertiana

Calculem $\omega(e_i) \equiv \rho_i$.

Tenim $(\rho_i) \in \ell^2$, en efecte:

$$\vec{\mathbf{z}}_n \equiv \sum_{i=1}^{n} \rho_i^* \vec{\mathbf{e}}_i$$

$$\omega(\vec{\mathbf{z}}_n) \equiv \sum_{i=1}^{n} \rho_i^* \omega(\vec{\mathbf{e}}_i) = \sum_{i=1}^{n} \left|\rho_i\right|^2 = \|\vec{\mathbf{z}}_n\|^2 \xrightarrow{n\to\infty} ?$$

? no pot ser infinit: si ho fos tindríem una contradicció:

$$\vec{\mathbf{y}}_n \equiv \frac{\vec{\mathbf{z}}_n}{\|\vec{\mathbf{z}}_n\|^2} \Rightarrow \|\vec{\mathbf{y}}_n\| = \frac{1}{\|\vec{\mathbf{z}}_n\|} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \{\vec{\mathbf{y}}_n\} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\vec{\mathbf{y}}_n \equiv \frac{\vec{\mathbf{z}}_n}{\|\vec{\mathbf{z}}_n\|^2} \Rightarrow \omega(\vec{\mathbf{y}}_n) = \frac{\omega(\vec{\mathbf{z}}_n)}{\|\vec{\mathbf{z}}_n\|^2} = \frac{\|\vec{\mathbf{z}}_n\|^2}{\|\vec{\mathbf{z}}_n\|^2} = 1 \Rightarrow \{\vec{\mathbf{y}}_n\} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$\lim \omega(\vec{\mathbf{y}}_n) \neq \omega(\lim \vec{\mathbf{y}}_n)$$

$\omega$ no contínua!!

Per tant $(\rho_i) \in \ell^2$

Construïm $\vec{\mathbf{z}} \equiv \sum_{i=1}^{n} \rho_i^* \vec{\mathbf{e}}_i$ *és el vector buscat*

En efecte:

$$\omega(\vec{\mathbf{x}}) = \omega\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \vec{\mathbf{e}}_i\right) = \omega\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} x_i \vec{\mathbf{e}}_i\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} x_i \omega(\vec{\mathbf{e}}_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} x_i \rho_i = \sum_{i=1}^{\infty} (\rho_i^*)^* x_i = \langle \tilde{z} | x \rangle$$

(q. e. d.)

| |
|---|
| Aquest teorema es generalitza a espai de Hilbert no separables (Teorema de Riesz-Fréchét). |