1. OPERADORS LINEALS.

OPERADOR LINEAL: $\hat{A}$

$$, \xrightarrow{\hat{A}} ,$$
$$\vec{\mathbf{x}} \to \hat{A}\vec{\mathbf{x}}$$

amb $\begin{cases} \hat{A}(\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}) = \hat{A}\vec{\mathbf{x}} + \hat{A}\vec{\mathbf{y}} \\ \hat{A}(\lambda\vec{\mathbf{x}}) = \lambda\hat{A}\vec{\mathbf{x}} \end{cases}$

- El domini de definició $\hat{A}$ no és necessàriament tot , [excepte: operador $\frac{d}{dx}$ de l'espai $\square^2_{[a,b]}$]

- Si dim , és finita, tot operador està definit a tot ,.

- La condició necessària i suficient per que $\hat{A} = \hat{B}$ és que $(\vec{\mathbf{x}} \mid \hat{A}\vec{\mathbf{y}}) = (\vec{\mathbf{x}} \mid \hat{B}\vec{\mathbf{y}})$, $\forall \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in ,$.

- *Operacions amb operadors:*

  - Suma: $(\hat{A}+\hat{B})\vec{\mathbf{x}} = \hat{A}\vec{\mathbf{x}} + \hat{B}\vec{\mathbf{x}}$

  - Producte per un escalar: $(\lambda\hat{A})\vec{\mathbf{x}} = \lambda(\hat{A}\vec{\mathbf{x}})$

  - Composició: $(\hat{A}\circ\hat{B})\vec{\mathbf{x}} = \hat{A}(\hat{B}\vec{\mathbf{x}})$

- *Operador continu:* Un operador, $\hat{A}$, és *continu* a $\vec{\mathbf{x}}$ si donada qualsevol successió $\vec{\mathbf{x}}_n \to \vec{\mathbf{x}}$ tenim que $\hat{A}\vec{\mathbf{x}}_n \to \hat{A}\vec{\mathbf{x}}$ $\left[\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \hat{A}\vec{\mathbf{x}}_n \to \hat{A}\left(\lim_{n\to\infty} \vec{\mathbf{x}}_n\right)\right]$

- *Operador acotat:* Un operador $\hat{A}$ (definit a tot ,) és *acotat* si existeix un número real positiu b que verifiqui:

$$\frac{\|\hat{A}\vec{\mathbf{x}}\|}{\|\vec{\mathbf{x}}\|} \le b, \ \forall \vec{\mathbf{x}} \in ,$$

- *Norma d'un operador acotat* és el mínim b que verifiqui la desigualtat anterior:

$$\|\hat{A}\| \equiv \sup \frac{\|\hat{A}\vec{\mathbf{x}}\|}{\|\vec{\mathbf{x}}\|} = \text{"màxim factor de dilatació de } \hat{A}\text{"} = \sup_{\|\vec{\mathbf{x}}\|=1} \|\hat{A}\vec{\mathbf{x}}\|$$

$$\boxed{\left\|\hat{A}\vec{\mathbf{x}}\right\| \le \left\|\hat{A}\right\|\left\|\vec{\mathbf{x}}\right\|}$$

Propietats:

- $\left\|\hat{A}\right\| > 0$ si $\hat{A} \neq \hat{0}$; $\left\|\hat{0}\right\| = 0$
- $\left\|\hat{A} + \hat{B}\right\| \le \left\|\hat{A}\right\| + \left\|\hat{B}\right\|$
- $\left\|\lambda\hat{A}\right\| = |\lambda|\left\|\hat{A}\right\|$
- $\left\|\hat{A} \circ \hat{B}\right\| \le \left\|\hat{A}\right\|\left\|\hat{B}\right\|$

- *Teorema:* Un operador $\hat{A}$ (definit a tot ,) és *contínua a tot* , si i només si és *acotat*

$(\Leftarrow)$ A acotat $\Rightarrow$ si $\vec{\mathbf{x}}_n \to \vec{\mathbf{x}}$ tenim $\left\|\hat{A}\vec{\mathbf{x}}_n \to \hat{A}\vec{\mathbf{x}}\right\| = \left\|\hat{A}(\vec{\mathbf{x}}_n - \vec{\mathbf{x}})\right\| \le \left\|\hat{A}\right\| + \left\|\vec{\mathbf{x}}_n - \vec{\mathbf{x}}\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow A$ contínua.

$(\Rightarrow)$ A contínua $\Rightarrow$ A acotat:

Suposem A: *no acotat* $\Rightarrow \forall N > 0, N \in \rceil$, $\exists \vec{\mathbf{x}}_N \mid \left\|\hat{A}\vec{\mathbf{x}}_N\right\| > \left\|\vec{\mathbf{x}}_N\right\| \Rightarrow \text{def}\, \vec{\mathbf{y}}_N \equiv \dfrac{\vec{\mathbf{x}}_N}{N\left\|\vec{\mathbf{x}}_N\right\|} \Rightarrow \left\|\vec{\mathbf{y}}_N\right\| = \dfrac{1}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \Rightarrow$
$\vec{\mathbf{y}}_N \xrightarrow[N\to\infty]{} \vec{\mathbf{0}} \Rightarrow \hat{A}\vec{\mathbf{y}}_N \xrightarrow[N\to\infty]{} \hat{A}\vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}}$ (1).

Per altra banda: $\left\|\hat{A}\vec{\mathbf{y}}_N\right\| > N\left\|\vec{\mathbf{y}}_N\right\| = 1 \Rightarrow \left\|A\vec{\mathbf{y}}_N\right\| \underset{N\to\infty}{\not\to} 0$ (2).

Comparant (1) i (2) veiem que ens porta a una contradicció!!

- *Teorema:* Tot operador lineal en un espai de Hilbert de dimensió *finita* és continu (=acotat).

Demostració: Sigui $\vec{\mathbf{u}}_1 \ldots \vec{\mathbf{u}}_N$ una base ortonormal

$$\vec{\mathbf{x}} \in ,;\ \vec{\mathbf{x}} \xrightarrow{\hat{A}} \vec{\mathbf{x}} = \hat{A}(\vec{\mathbf{x}})$$

$$\boxed{x'_i = A_{ij}x_j}$$

$$\Rightarrow \left\|\hat{A}(\vec{\mathbf{x}})\right\|^2 = \left\|\vec{\mathbf{x}}'\right\|^2 = \sum_i |x'_i|^2 = \sum_i \left|\sum_j A_{ij}x_j\right|^2 \underset{\substack{\text{Desig}\\ \text{Schwartz}}}{\le} \sum_i \left[\sum_j |A_{ij}|^2 \sum_k |x_k|^2\right] =$$

$$= \sum_{ij} |A_{ij}|^2 \left\|\vec{\mathbf{x}}\right\|^2 \le n^2 M^2 \left\|\vec{\mathbf{x}}\right\|^2 \text{ on } M = \max\{|A_{ij}|\}$$

$$\Rightarrow \left\|\hat{A}(\vec{\mathbf{x}})\right\| / \left\|\vec{\mathbf{x}}\right\| \leq nM : \ \hat{A} \ \textit{acotat} \text{ (q. e. d.).}$$

- *Teorema:* tot operador *acotat* en un espai de Hilbert *separable* es pot representar per una matriu (finita o infinita).

Si dimensió és finita $\Rightarrow$ és evident.
Si dimensió infinita; $\vec{\mathbf{e}}_1 \ldots \vec{\mathbf{e}}_n \ldots$ base ortonormal (hilbertiana).

$$\vec{\mathbf{x}} = \sum_1^{\alpha} x_i \vec{\mathbf{e}}_i \ \text{ on } \ x_i = \langle \vec{\mathbf{e}}_i | \vec{\mathbf{x}} \rangle$$

$$\hat{A}(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{x}}' = \sum_1^{n} x_i' \vec{\mathbf{e}}_i \ \text{ on } \ x_i' = \left\langle \vec{\mathbf{e}}_i \middle| \hat{A}(\vec{\mathbf{x}}) \right\rangle$$

$$\text{definim } \vec{\mathbf{x}}^{(n)} = \sum_1^{n} x_i \vec{\mathbf{e}}_i \ \text{ evidentment } \vec{\mathbf{x}}^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} \vec{\mathbf{x}}$$

llavors

$$x_i' = \left(\vec{\mathbf{e}}_i \mid \hat{A}(\vec{\mathbf{x}})\right) = \left(\vec{\mathbf{e}}_i \mid \hat{A}\left(\lim_{n\to\infty} \vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)\right) \underset{\hat{A} \text{ és contínua}}{=} \left(\vec{\mathbf{e}}_i \mid \lim_{n\to\infty} \hat{A}\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\vec{\mathbf{e}}_i \mid \hat{A}\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\vec{\mathbf{e}}_i \mid \hat{A}\left(\sum_1^n x_j \vec{\mathbf{e}}_j\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n x_j \left(\underbrace{\vec{\mathbf{e}}_i \mid \hat{A}(\vec{\mathbf{e}}_j)}_{\equiv A_{ij}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} x_j$$

Notació de Dirac

$$|x\rangle \xrightarrow{A} |x'\rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} |x\rangle = \sum_i x_j e_j \text{ amb } x_j = \langle e_j | x \rangle \\ |x'\rangle = \sum_j x_i' e_i \text{ amb } x_i' = \langle e_j | x \rangle \\ x'_i = \sum_{ij} x_j \vec{\mathbf{e}}_j \text{ amb } A_{ij} = \langle e_i | A | e_j \rangle \end{array}\right\} \quad \boxed{|x'\rangle = A|x\rangle = \sum_{i,j} |e_i\rangle\langle e_i|A|e_j\rangle\langle e_i|x\rangle}$$

és a dir: $\boxed{\sum_k |e_k\rangle\langle e_k| = \mathbf{1}}$

OPERADOR INVERS

Donat un operador $\hat{A}$, direm que $\hat{A}'$ *és l'invers de* $\hat{A}$ si es verifica:

$$\hat{A} \circ \hat{A}' = \hat{A}' \circ \hat{A} = \mathbf{1} \text{ (operador identitat)}$$

Nota: no és suficient $\hat{A}\hat{A}' = \mathbf{1}$ ja que en general això no implica que $\hat{A}'\hat{A} = \mathbf{1}$ [per que $\hat{A}\hat{A}' = \mathbf{1}$ impliqui $\hat{A}'\hat{A} = \mathbf{1}$ és necessari que $\hat{A}'$ sigui també invertible, és a dir, que $\exists \hat{A}''$ tal que $\hat{A}'\hat{A}'' = \mathbf{1}$, llavors tindrem que $\hat{A}'' = \hat{A}$. En general, però, la invertibilitat de $\hat{A}$ no implica la invertibilitat de $\hat{A}'$. Per això hem d'imposar $\hat{A}\hat{A}' = \hat{A}'\hat{A} = \mathbf{1}$ a la definició] (Exemple: ℓ^2; $\hat{A}(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$; $\hat{A}'(x_1, x_2, \ldots) = (0, 0, \ldots)$). Si la dimensió de l'espai és finita $\hat{A}\hat{A}' = \mathbf{1} \Rightarrow \hat{A}'\hat{A} = \mathbf{1}$ [Això és degut a que la condició necessària i suficient per l'existència d'invers, $\hat{A}'$, és que $\det A \neq 0$, però al ser $\hat{A}\hat{A}' = \mathbf{1} \Rightarrow \det A' \neq 0 \Rightarrow \hat{A}'$ invertible $\Rightarrow \hat{A}'\hat{A} = \mathbf{1}$].

Nota: En general $\hat{A}$ acotat $\not\Rightarrow \hat{A}^{-1}$ acotat (condició necessària i suficient per $\hat{A}^{-1}$ acotat: $\exists k : k < 0 \leq \dfrac{\|\hat{A}\vec{\mathbf{x}}\|}{\|\vec{\mathbf{x}}\|} \leq \|\hat{A}\|$).

OPERADOR ADJUNT

Donat un operador $\hat{A}$, definim *l'operador adjunt de* $\hat{A}$ com aquell $\hat{A}^+$ que verifica:

$$\left(\vec{\mathbf{x}} \mid \hat{A}\vec{\mathbf{y}}\right) = \left(\hat{A}^+\vec{\mathbf{x}} \mid \vec{\mathbf{y}}\right) \qquad \forall \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in ,$$

(o, equivalentment, $\left(\hat{A}\vec{\mathbf{x}} \mid \vec{\mathbf{y}}\right) = \left(\vec{\mathbf{x}} \mid \hat{A}^+\vec{\mathbf{y}}\right) \qquad \forall \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in ,$)

- Una condició *suficient* per l'existència de $\hat{A}^+$ és que $\hat{A}$ sigui acotat (=continu).

  $\hat{A}$: acotat $\Rightarrow$ la "forma " $\left(\vec{\mathbf{x}} \mid \hat{A}(\ )\right)$ és contínua, $\forall \vec{\mathbf{x}} \in , \Rightarrow \exists \vec{\mathbf{z}}_{(\vec{\mathbf{x}})} \in ,$ tal que $\left(\vec{\mathbf{x}} \mid \hat{A}(\ )\right) = \left(\vec{\mathbf{z}}_{(\vec{\mathbf{x}})} \mid \ \right) \Rightarrow$ definim $\hat{A}\vec{\mathbf{x}} \equiv \vec{\mathbf{z}}_{(\vec{\mathbf{x}})}$: $\hat{A}^+$ és l'operador adjunt de $\hat{A}$.

- Si $\hat{A}$ és acotat $\Rightarrow \hat{A}^+$ és acotat i $\|\hat{A}^+\| = \|\hat{A}\|$

$$\|\hat{A}^+\vec{\mathbf{x}}\|^2 = \left(\hat{A}^+\vec{\mathbf{x}} \mid \hat{A}^+\vec{\mathbf{x}}\right) = \left|\left(\vec{\mathbf{x}} \mid \hat{A}\hat{A}^+\vec{\mathbf{x}}\right)\right| \leq \|\vec{\mathbf{x}}\|\|\hat{A}\hat{A}^+\vec{\mathbf{x}}\| \leq \|\vec{\mathbf{x}}\|\|\hat{A}\|\|\hat{A}^+\vec{\mathbf{x}}\| \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\hat{A}^+ \text{ és acotat} \\ \text{i } \|\hat{A}^+\| \leq \|\hat{A}\|\end{array}} \Rightarrow \boxed{\|\hat{A}^+\| = \|\hat{A}\|}$$

$$\left\|\hat{A}\vec{\mathbf{x}}\right\|^2 = \left(\hat{A}\vec{\mathbf{x}} \mid \hat{A}\vec{\mathbf{x}}\right) = \left|\left(\vec{\mathbf{x}} \mid \hat{A}^+\hat{A}\vec{\mathbf{x}}\right)\right| \le \left\|\vec{\mathbf{x}}\right\|\left\|\hat{A}^+\hat{A}\vec{\mathbf{x}}\right\| \le \left\|\vec{\mathbf{x}}\right\|\left\|\hat{A}^+\right\|\left\|\hat{A}\vec{\mathbf{x}}\right\| \Rightarrow$$

$$\boxed{\left\|\hat{A}\right\| \le \left\|\hat{A}^+\right\|} \Rightarrow \boxed{\left\|\hat{A}^+\right\| = \left\|\hat{A}\right\|}$$

- Propietats

a) $\left(\hat{A}^+\right)^+ = \hat{A}$

b) $\left(\hat{A} + \hat{B}\right)^+ = \hat{A}^+ + \hat{B}^+$

c) $\left(\lambda\hat{A}\right)^+ = \lambda^*\hat{A}^+$

d) $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^+ = \hat{B}^+ + \hat{A}^+$

e) $\hat{A}$ invertible i $\hat{A}^{-1}$ acotat $\Rightarrow \left(\hat{A}^+\right)^{-1} = \left(\hat{A}^{-1}\right)^+$

f) $\left(\vec{\mathbf{x}} \mid \hat{A}^+\vec{\mathbf{y}}\right) = \left(\vec{\mathbf{y}} \mid \hat{A}\vec{\mathbf{x}}\right)^*$

Corol·lari: en una base *ortonormal* $A^+_{ij} = A^*_{ji}$

$A^+ = A^{T*}$

OPERADOR AUTOADJUNT O HERMÍTIC (O HERMITIÀ)

Un operador A és *autoadjunt* si $A = A^+$

- Propietats:

a) $\hat{0}$, $\hat{\mathbf{1}}$ són hermítics.

b) Si $\hat{A}$ i $\hat{B}$ són hermítics $\Rightarrow \hat{A} + \hat{B}$ és hermític.

c) $\hat{A}$ positiu; λ *real* $\Rightarrow \lambda\hat{A}$ positiu.

d) $\hat{A}$ i $\hat{B}$ hermítics $\Rightarrow \hat{A}\hat{B}$ hermític *si i només sí* $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{0}$.

e) $\hat{A}$ hermític i invertible $\Rightarrow \hat{A}^{-1}$: hermític.

f) $\hat{A}$: acotat $\Rightarrow \hat{A} = \hat{A}_R + i\hat{A}_I$ amb $\hat{A}_R, \hat{A}_I$ hermítics $\left[\hat{A}_R \equiv \frac{1}{2}\left(\hat{A} + \hat{A}^+\right); \hat{A}_I \equiv \frac{1}{2i}\left(\hat{A} - \hat{A}^+\right)\right]$ *Descomposició "cartesiana" d'un operador acotat.*

g) $\hat{A}$ hermític $\Rightarrow \langle \vec{\mathbf{x}} | \hat{A}\vec{\mathbf{y}} \rangle = \langle \vec{\mathbf{y}} | \hat{A}\vec{\mathbf{x}} \rangle^*$.

Corol·laris:

1. $\langle \vec{\mathbf{x}} | A\vec{\mathbf{x}} \rangle = \text{real}, \ \forall \vec{\mathbf{x}} \in ,.$

2. En una base *ortonormal* $A_{ij} = A^*_{ji}$ $\quad (A = A^{T*})$.

OPERADOR DEFINIT POSITIU

Un operador és *definit positiu* si és hermític i $\langle \vec{\mathbf{x}} | A\vec{\mathbf{x}} \rangle > 0$, $\forall \vec{\mathbf{x}} \in$, $(\vec{\mathbf{x}} \neq \hat{0})$.

[Si canviem la condició > 0 per ≥ 0 l'operador és de dimensió *semi-positiu* o *no negatiu*].

- Propietats:

a) $\hat{\mathbf{1}}$ és positiu, $\hat{0}$ és no negatiu.

b) $\hat{A}$, $\hat{B}$ positius $\Rightarrow \hat{A} + \hat{B}$ positiu.

c) $\hat{A}$ positiu; λ *real positiu* $\Rightarrow \lambda\hat{A}$ positiu.

d) $\hat{A}$ qualsevol operador que tingui adjunt $\Rightarrow AA^+$ *no negatiu* (també A^+A no negatiu).

e) $\hat{A}$, $\hat{B}$ positius i $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{0} \Rightarrow \hat{A} \circ \hat{B}$ positiu (demostració trivial).

f) $\hat{A}$ positiu $\Rightarrow \hat{S}$ positiu tal que $\hat{S}\hat{S} = \hat{A}$ (demostració no trivial): $\hat{S} = \sqrt{\hat{A}}$

OPERADOR UNITARI

Un operador $\hat{U}$ és *unitari* si és *invertible* i conserva les normes: $\left\| \hat{U}\vec{\mathbf{x}} \right\| = \left\| \vec{\mathbf{x}} \right\|$, $\forall \vec{\mathbf{x}} \in$,.

- Propietats:

a) $\hat{U}$ unitari $\Rightarrow \hat{U}^{-1}$ unitari

b) $\hat{U}$ unitari $\Rightarrow \hat{U}$ acotat i $\left\| \hat{U} \right\| = 1$

c) $\hat{U}$ unitari $\Leftrightarrow \hat{U}^{-1} = \hat{U}^+$

$$\hat{U} \text{ unitari} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \hat{U} \text{ invertible} \\ \|\vec{\mathbf{x}}\| = \|\hat{U}\vec{\mathbf{x}}\|, \forall \vec{\mathbf{x}} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \hat{U} \text{ invertible} \\ (\vec{\mathbf{x}} \mid \vec{\mathbf{x}}) = (\hat{U}\vec{\mathbf{x}} \mid \hat{U}\vec{\mathbf{x}}), \forall \vec{\mathbf{x}} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{U} \text{ invertible} \\ \hat{U} + \hat{U} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\hat{U}^{-1} = \hat{U}^{+}}$$

d) $\hat{U}$, $\hat{V}$ unitaris $\Rightarrow \hat{U} \circ \hat{V}$ unitari .

e) $\hat{U}$ unitari i $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda\hat{U}$ unitari.

f) Si dimensió finita i la base és ortonormal $\Rightarrow U_{ij}$ és una matriu de files i columnes ortonormals.

OPERADOR ANTI-UNITARI

Un operador $\hat{A}$ és anti-unitari si és anti-lineal, invertible i $\|\hat{A}\vec{\mathbf{x}}\| = \|\vec{\mathbf{x}}\|$, $\forall \vec{\mathbf{x}} \in$,

- Propietats:

a) $\|\hat{A}\| = 1$.

b) $(\hat{A}\vec{\mathbf{x}} \mid \hat{A}\vec{\mathbf{y}}) = (\vec{\mathbf{x}} \mid \vec{\mathbf{y}})^* = (\vec{\mathbf{y}} \mid \vec{\mathbf{x}})$ [demostració: aplicar definició als vectors $\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}$ i $\vec{\mathbf{x}} + i\vec{\mathbf{y}}$].

c) $\hat{A}$ antiunitari $\Rightarrow \hat{A}^2$ unitari.

PROJECTOR (o operador de projecció)

Un operador $\hat{P}$ és un *projector* si és indempotent i hermític: $\boxed{\hat{P}^2 = \hat{P} = \hat{P}^{+}}$

- $\hat{P}$: projector $\Rightarrow \hat{P}$ acotat amb $\|\hat{P}\| = 1$ o $\|\hat{P}\| = 0$ ($\|\hat{P}\| = 0$ únicament quan $\hat{P} = 0$)

$$\|\hat{P}\vec{\mathbf{x}}\|^2 = \left(\underbrace{\hat{P}\vec{\mathbf{x}} \mid \hat{P}\vec{\mathbf{x}}}_{\text{real}}\right) = \langle \vec{\mathbf{x}} | \hat{P}^2\vec{\mathbf{x}} \rangle = (\vec{\mathbf{x}} \mid \hat{P}\vec{\mathbf{x}}) = \langle \|\vec{\mathbf{x}}\| \|\hat{P}\vec{\mathbf{x}}\| \rangle \Rightarrow \|\hat{P}\vec{\mathbf{x}}\| \le \|\vec{\mathbf{x}}\| \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{matrix} \hat{P} \text{ és acotat} \\ \text{i } \|\hat{P}\| \le 1 \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{\|\hat{P}\| = 1}$$

Si $\hat{P} \neq \hat{0}$, considerem $\vec{\mathbf{x}}$ que verifiqui $\hat{P}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}} \neq \vec{0} \Rightarrow \hat{P}\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{y}} \Rightarrow \boxed{\|\hat{P}\| \ge 1} \Rightarrow \boxed{\|\hat{P}\| = 1}$

- $\hat{P}$: projector $\Leftrightarrow \left(\hat{\mathbf{1}} - \hat{P}\right)$: projector.

- *Subespai de projecció* corresponents a un projector $\hat{P}$ és la imatge de tot l'espai , pel projector: $\hat{P}(H) \equiv \left\{\vec{\mathbf{y}} \mid \exists \vec{\mathbf{x}} \in H : \hat{P}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}}\right\} =$ "subespai de projecció de $\hat{P}$"

  a) $\vec{\mathbf{x}} \in \hat{P}(H)$ si i només si $\hat{P}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}$

  $(\Rightarrow)$ $x \in \hat{P}(H) \Rightarrow \exists \vec{\mathbf{z}} \mid \vec{\mathbf{x}} = \hat{P}\vec{\mathbf{z}} \Rightarrow \hat{P}\vec{\mathbf{x}} = \hat{P}\hat{P}\vec{\mathbf{z}} = \hat{P}\vec{\mathbf{z}} = \vec{\mathbf{x}}$
  $(\Leftarrow)$ trivial

  b) Considerem el subespai $\hat{P}(H)^{\perp}$ (és òbviament un subespai *tancat*):

  $\vec{\mathbf{x}} \in \hat{P}(H)^{\perp}$ si i només si $\hat{P}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$
  $\vec{\mathbf{x}} \in \hat{P}(H)^{\perp} \Leftrightarrow \left(\vec{\mathbf{x}} \mid \hat{P}\vec{\mathbf{y}}\right) = 0, \forall \vec{\mathbf{y}} \in, \Leftrightarrow \left(\hat{P}\vec{\mathbf{x}} \mid \vec{\mathbf{y}}\right) = 0, \forall \vec{\mathbf{y}} \in, \Leftrightarrow \hat{P}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$

  c) $\hat{P}(H)^{\perp} = \left(\hat{\mathbf{1}} - \hat{P}\right)(H)$

  $\vec{\mathbf{x}} \in \hat{P}(H)^{\perp} \Leftrightarrow \hat{P}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{x}} - \hat{P}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}} \Leftrightarrow \left(\hat{\mathbf{1}} - \hat{P}\right)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{x}} \in \left(\hat{\mathbf{1}} - \hat{P}\right)$

  Corol·lari: $\hat{P}(H) = \left(\hat{\mathbf{1}} - \hat{P}\right)(H)^{\perp} =$ subespai tancat.

  d) Donat un subespai *tancat* M, existeix un (únic) projector $\hat{P}$ tal que $\hat{P}(H) = M$.

  M : subespai tancat $\Rightarrow, = M \oplus M^{\perp} \Rightarrow \forall \vec{\mathbf{x}} \in,: \quad \vec{\mathbf{x}} = \underset{\in M}{\vec{\mathbf{x}}_M} + \underset{\in M^{\perp}}{\vec{\mathbf{x}}_{M^{\perp}}}$

  (descomposició única!!).

  Així, cada projector $\hat{P}$ defineix un espai de projecció (tancat).

  Així cada subespai tancat M defineix un projector, l'espai de projecció del qual és M.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Cada projector ve identificat pel seu espai de projecció.}}$

- En general, el producte de dos projectors, $\hat{P}_1$ i $\hat{P}_2$ *no és* projector.

La condició necessària i suficient per que $\hat{P}_1 \circ \hat{P}_2$ sigui projector és que $\left[\hat{P}_1, \hat{P}_2\right] = \hat{0}$ (trivial).

En aquest cas: $\hat{P}_1 \circ \hat{P}_2(H) = \hat{P}_1(H) \cap \hat{P}_2(H)$

$$(\subset)\ \vec{\mathbf{x}} \in \hat{P}_1 \circ \hat{P}_2(H) \Rightarrow \vec{\mathbf{x}} = \underbrace{\hat{P}_1\left(\hat{P}_2\vec{\mathbf{x}}\right)}_{\in \hat{P}_1(H)} = \underbrace{\hat{P}_2\left(\hat{P}_1\vec{\mathbf{x}}\right)}_{\in \hat{P}_2(H)} \Rightarrow \vec{\mathbf{x}} \in \hat{P}_1(H) \cap \hat{P}_2(H) \Rightarrow$$
$$\hat{P}_1\hat{P}_2(H) \subset \hat{P}_1(H) \cap \hat{P}_2(H).$$

$$(\supset)\ \vec{\mathbf{x}} \in \hat{P}_1 \cap \hat{P}_2(H) \Rightarrow \hat{P}_1\left(\hat{P}_2\vec{\mathbf{x}}\right) = \hat{P}_1\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}} \Rightarrow \vec{\mathbf{x}} \in \hat{P}_1\hat{P}_2(H) \Rightarrow \hat{P}_1(H) \cap \hat{P}_2(H)$$
$$\subset \hat{P}_1\hat{P}_2(H).$$

- Dos projectors $\hat{P}_1$ i $\hat{P}_2$ és diu que són *ortogonals* si ho són els espais de projecció respectius. Escriurem $\boxed{\hat{P}_1 \perp \hat{P}_2 \Leftrightarrow \hat{P}_1(H) \perp \hat{P}_2(H)}$

La condició necessària i suficient per que $\hat{P}_1 \perp \hat{P}_2$ és que $\hat{P}_1 \circ \hat{P}_2 = 0$ $\left(\Rightarrow \hat{P}_2\hat{P}_1 = 0\right)$.

$$0 = \left(\hat{P}_1\hat{P}_2\vec{\mathbf{x}} \,|\, \vec{\mathbf{y}}\right) = \left(\hat{P}_2\vec{\mathbf{x}} \,|\, \hat{P}_1\vec{\mathbf{y}}\right),\ \forall \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in ,\Leftrightarrow \hat{P}_1(H) \perp \hat{P}_2(H)$$

- Donats dos projectors $\hat{P}_1$ i $\hat{P}_2$ direm que $\boxed{\hat{P}_1 \leq \hat{P}_2 \text{ si } \hat{P}_1(H) \subseteq \hat{P}_2(H)}$

La condició necessària i suficient per que $\hat{P}_1 \leq \hat{P}_2$ es que $\hat{P}_1\hat{P}_2 = \hat{P}_1$ $\left(\Rightarrow \hat{P}_2\hat{P}_1 = 0\right)$.

$$(\Rightarrow)\hat{P}_1 \leq \hat{P}_2 \Rightarrow M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow \forall \vec{\mathbf{x}} \in ,:\quad \vec{\mathbf{x}} = \underbrace{\vec{\mathbf{x}}_{M_2}}_{=\vec{\mathbf{x}}_{M_1} + \vec{\mathbf{x}}_{M_1^\perp \text{ dins de } M_2}} + \vec{\mathbf{x}}_{M_2^\perp} = \vec{\mathbf{x}}_{M_1} + \vec{\mathbf{x}}_{M_1^\perp \text{ dins de } M_2} + \vec{\mathbf{x}}_{M_2^\perp};$$

$$\hat{P}_1\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}_{M_1}.$$

$$(\Leftarrow)\hat{P}_1 = \hat{P}_1\hat{P}_2\left(= \hat{P}_2\hat{P}_1\right) \Rightarrow \hat{P}_1(H) = \underbrace{\hat{P}_1\hat{P}_2}_{\text{projector}}(H) = \hat{P}_1(H) \cap \hat{P}_2(H) \Rightarrow \hat{P}_1(H) \subseteq \hat{P}_2(H) \Rightarrow \hat{P}_1 \leq \hat{P}_2.$$

2. TEOREMES DE VALORS I VECTORS PROPIS.

- Donat un operador $\hat{A}$ direm que λ és un valor propi de $\hat{A}$ i $\vec{\mathbf{x}}$ el corresponent vector propi si $\hat{A}\vec{\mathbf{x}} = \lambda\vec{\mathbf{x}}$.

- El conjunt de vectors propis corresponents a un determinant valor propi λ és un subespai que denotarem per M_λ *(subespai propi)*.

$$M_\lambda = \left\{\vec{\mathbf{x}} \,|\, \hat{A}\vec{\mathbf{x}} = \lambda\vec{\mathbf{x}}\right\} = \mathrm{Ker}\left(\hat{A} - \lambda\right)$$

- El problema de trobar els valors i vectors propis és, en general, complicat i no sempre té solució (hi ha operadors que no tenen valors propis).

  La estratègia a seguir quan la dimensió és finita és resoldre l'equació característica: $\det(A - \lambda\mathbf{1}) = 0$. Aquest procediment no és utilitzable quan la dimensió de l'espai és infinita i s'ha de recórrer a altres mètodes.

- Si dim, és finita, tot operador $\hat{A}$ té, almenys, un valor propi i un vector propi associat.

$$\det(A-\lambda\mathbf{1})=0 \text{ té sempre solució} \Rightarrow (A-\lambda\mathbf{1})\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{0}} \text{ té solució no trivial.}$$

TEOREMES DE VALOR PROPIS

a) Si $\hat{A}$ és *acotat* $\Rightarrow$ El conjunt dels *valors absoluts* dels seus valors propis és *acotat*.

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_i = \text{valors propis de } \hat{A}\\ \vec{\mathbf{x}}_i = \text{vectors propis corresponents a } \lambda_i\end{array}\right\}\hat{A}\vec{\mathbf{x}}_i=\lambda_i\vec{\mathbf{x}}_i \Rightarrow \underbrace{\left\|\hat{A}\vec{\mathbf{x}}_i\right\|}_{\le\|\hat{A}\|\|\vec{\mathbf{x}}_i\|}=\|\lambda_i\vec{\mathbf{x}}_i\|=|\lambda_i|\|\vec{\mathbf{x}}_i\| \rightarrow$$

$$\boxed{|\lambda_i|\le\|\hat{A}\|}$$

b) Si $\hat{A}$ és *hermític* $\Rightarrow$ Els seus valors propis són *reals*.

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = \text{valor propi}\\ \vec{\mathbf{x}} = \text{vector propi corresponent}\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}(\vec{\mathbf{x}}\mid\hat{A}\vec{\mathbf{x}})=(\vec{\mathbf{x}}\mid\lambda\vec{\mathbf{x}})=\lambda\|\vec{\mathbf{x}}\|^2=\\ =(\hat{A}\vec{\mathbf{x}}\mid\vec{\mathbf{x}})=(\lambda\vec{\mathbf{x}}\mid\vec{\mathbf{x}})=\lambda^*\|\vec{\mathbf{x}}\|\end{array}\right\}\boxed{\lambda=\lambda^*}$$

c) Si $\hat{A}$ és *definit positiu* $\Rightarrow$ Els seus valors propis són *positius*.

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = \text{valor propi}\\ \vec{\mathbf{x}} = \text{vector propi corresponent}\end{array}\right\}0<(\vec{\mathbf{x}}\mid\hat{A}\vec{\mathbf{x}})=(\vec{\mathbf{x}}\mid\lambda\vec{\mathbf{x}})=\lambda\|\vec{\mathbf{x}}\|^2\rightarrow\boxed{\lambda>0}$$

d) Si $\hat{U}$ és *unitari* $\Rightarrow$ Els seus valors propis són de *mòdul 1*.

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = \text{valor propi}\\ \vec{\mathbf{x}} = \text{vector propi corresponent}\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}(\hat{U}\vec{\mathbf{x}}\mid\hat{U}\vec{\mathbf{x}})=(\lambda\vec{\mathbf{x}}\mid\lambda\vec{\mathbf{x}})=\lambda^2\|\vec{\mathbf{x}}\|^2=\\ =(\vec{\mathbf{x}}\mid\vec{\mathbf{x}})=\|\vec{\mathbf{x}}\|^2\end{array}\right\}\rightarrow\boxed{|\lambda|=1}$$

e) Si $\hat{A}$ és *antiunitari* $\Rightarrow$ *No té* valors ni vectors propis $\left[\begin{array}{l}\hat{A}\vec{\mathbf{x}}=\lambda\vec{\mathbf{x}};\ \hat{A}(\mu\vec{\mathbf{x}})=\mu^*(\hat{A}\vec{\mathbf{x}})=\\ =\mu^*\hat{A}\vec{\mathbf{x}}\ne\lambda(\mu\vec{\mathbf{x}})\end{array}\right]$

f) Si $\hat{P}$ és un *projector* $\Rightarrow$ Els seus valors són 0 i 1 $\left[\hat{P}\vec{\mathbf{x}}=\lambda\vec{\mathbf{x}}\ldots\right]\Rightarrow\boxed{\lambda=0,1}$

TEOREMES DE VECTORS PROPIS

a) Si $\hat{A}$ és *hermític* $\Rightarrow$ Els vectors propis corresponents a valors propis *diferents* són *ortogonals*.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}\vec{\mathbf{x}}=\lambda\vec{\mathbf{x}}\\ \hat{A}\vec{\mathbf{y}}=\mu\vec{\mathbf{y}}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}(\vec{\mathbf{x}}\mid\hat{A}\vec{\mathbf{y}})=\mu(\vec{\mathbf{x}}\mid\vec{\mathbf{y}})=(\hat{A}\vec{\mathbf{x}}\mid\vec{\mathbf{y}})\\ =\lambda^*(\vec{\mathbf{x}}\mid\vec{\mathbf{y}})=\lambda(\vec{\mathbf{x}}\mid\vec{\mathbf{y}})\end{array}\right\}\Rightarrow\underbrace{(\lambda-\mu)}_{\ne0}(\vec{\mathbf{x}}\mid\vec{\mathbf{y}})=0\Rightarrow\vec{\mathbf{x}}\perp\vec{\mathbf{y}}$$

b) Si $\hat{U}$ és *unitari* $\Rightarrow$ Els vectors propis corresponents a valors propis *diferents* són *ortogonals*.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{U}\vec{\mathbf{x}} = e^{i\alpha}\vec{\mathbf{x}} \\ \hat{U}\vec{\mathbf{y}} = e^{i\beta}\vec{\mathbf{y}}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\left(\hat{U}\vec{\mathbf{x}} \mid \hat{U}\vec{\mathbf{y}}\right) = \mu\left(e^{i\alpha}\vec{\mathbf{x}} \mid e^{i\beta}\vec{\mathbf{y}}\right) = \\ = \underbrace{e^{i(\alpha-\beta)}}_{\neq 1}\left(\vec{\mathbf{x}} \mid \vec{\mathbf{y}}\right) = \left(\vec{\mathbf{x}} \mid \vec{\mathbf{y}}\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\vec{\mathbf{x}} \mid \vec{\mathbf{y}}\right) = 0 \Rightarrow \vec{\mathbf{x}} \perp \vec{\mathbf{y}}$$

Corol·lari: Si , és un espai de Hilbert *separable* el conjunt de tots els valors propis d'un operador *hermític o unitari* és *finit* o *infinit numerable(∨)*.

c) Sigui $\hat{A}$ un operador *hermític o unitari*, siguin M_{λ_k} els seus subespais propis, sigui $M = M_{\lambda_1} \oplus M_{\lambda_2} \oplus \ldots \equiv M_{\lambda_k}$ (Evidentment, M és invariant sota $\hat{A}$) $\Rightarrow M^{\perp}$ és també invariant sota $\hat{A}$.

Sigui $\vec{\mathbf{x}} \in M$, $\vec{\mathbf{y}} \in M^{\perp}$ (arbitraris).

1. Si $\hat{A}$ és hermític: $\left(\underbrace{\vec{\mathbf{x}}}_{\in M} \mid \hat{A}\underbrace{\vec{\mathbf{y}}}_{\in M^{\perp}}\right) = \left(\underbrace{\hat{A}\vec{\mathbf{x}}}_{\in M} \mid \underbrace{\vec{\mathbf{y}}}_{\in M^{\perp}}\right) = 0$, $\forall \vec{\mathbf{x}} \in M$, $\forall \vec{\mathbf{y}} \in M^{\perp} \Rightarrow \boxed{\hat{A}\vec{\mathbf{y}} \in M^{\perp}\ \forall \vec{\mathbf{y}} \in M^{\perp}}$

2. Si $\hat{A}$ és unitari ($\Rightarrow$bijectiu): $\forall \vec{\mathbf{x}} \in M$, $\exists \vec{\mathbf{x}}' \in M \mid \vec{\mathbf{x}} = \hat{A}\vec{\mathbf{x}}'$

$$\left(\underbrace{\vec{\mathbf{x}}}_{\in M} \mid \hat{A}\underbrace{\vec{\mathbf{y}}}_{\in M^{\perp}}\right) = \left(\underbrace{\hat{A}\vec{\mathbf{x}}'}_{\in M} \mid \hat{A}\underbrace{\vec{\mathbf{y}}}_{\in M^{\perp}}\right) = \left(\underbrace{\vec{\mathbf{x}}'}_{\in M} \mid \underbrace{\vec{\mathbf{y}}}_{\in M^{\perp}}\right) = 0, \forall \vec{\mathbf{x}} \in M, \forall \vec{\mathbf{y}} \in M^{\perp} \Rightarrow$$
$$\boxed{\hat{A}\vec{\mathbf{y}} \in M^{\perp}\ \forall \vec{\mathbf{y}} \in M^{\perp}}$$

- *Corol·lari:* Si la dimensió és finita tot operador hermític o unitari és diagonalitzable.

$M^{\perp}$ no pot ser diferent de $\{\vec{\mathbf{0}}\}$ ja que hauria de ser de dimensió finita i, per tant hauria de contenir almenys un vector propi de $\hat{A}$ (restringits a $M^{\perp}$).

NOTA SOBRE ELS VECTORS NO ACOTATS: A la pràctica s'utilitzen alguns operadors no acotats a l'espai (de vegades ni tan sols definits a tot ,) tots els resultats anteriors són essencialment correctes restringits als corresponents dominis de definició i de continuïtat. Encara que s'ha de refinar convenientment els enunciats d'alguns teoremes.

(v) Demostració de que en un espai de Hilbert separable tot sistema ortonormal és numerable:

Si , és separable i $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ és una base hilbertiana tenim que $\langle\{\vec{\mathbf{e}}_i\}\rangle$ és dens a ,. Però també tenim que $\langle\{\vec{\mathbf{e}}_i\}\rangle_{\mathcal{Q}}$ és dens a ,, ja que ho és a $\langle\{\vec{\mathbf{e}}_i\}\rangle$ [$\mathcal{Q}$ dins a |]. A més a més $\langle\{\vec{\mathbf{e}}_i\}\rangle_{\mathcal{Q}}$ és numerable, per ser $\mathcal{Q}$ numerable.

Considerem un sistema ortonormal *no numerable* $\{\vec{\mathbf{U}}_\lambda\}$ $\begin{pmatrix} \|\vec{\mathbf{U}}_\lambda\| = 1, \forall\lambda \\ (\vec{\mathbf{U}}_\lambda \mid \vec{\mathbf{U}}_{\lambda'}) = 0, \forall\lambda \neq \lambda' \end{pmatrix}$.

Calculem la distància $d(\vec{\mathbf{U}}_\lambda, \vec{\mathbf{U}}_{\lambda'}) = \|\vec{\mathbf{U}}_\lambda - \vec{\mathbf{U}}_{\lambda'}\| = \sqrt{1+1+\underbrace{(\vec{\mathbf{U}}_\lambda \mid \vec{\mathbf{U}}_{\lambda'})}_{=0}} = \sqrt{2}$.

Considerem les bols obertes $B\left(\vec{\mathbf{U}}_\lambda, \sqrt{2}/4\right) \equiv B_\lambda$, B_λ és la infinitat no numerable de boles obertes disjuntes. [Són disjuntes ja que si $\vec{\mathbf{a}} \in B_\lambda \cap B_{\lambda'} \Rightarrow d(\vec{\mathbf{U}}_\lambda, \vec{\mathbf{U}}_{\lambda'}) \leq d(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{U}}_\lambda) + d(\vec{\mathbf{a}} \mid \vec{\mathbf{U}}_{\lambda'}) \leq \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ $\underbrace{d(\vec{\mathbf{U}}_\lambda, \vec{\mathbf{U}}_{\lambda'})}_{\sqrt{2}} \leq \sqrt{2}/2$ (absurd)].

Dins de cada bola B_λ hi haurà algun element de $\langle\{\vec{\mathbf{e}}_i\}\rangle_{\mathcal{Q}}$ (dens) $\Rightarrow \langle\{\vec{\mathbf{e}}_i\}\rangle_{\mathcal{Q}}$ no numerable (absurd).

$\Rightarrow$ Tot sistema ortonormal d'un espai de Hilbert separable és successivament numerable.