Prova d'accés a la Universitat (2007)

Selectivitat

Matemàtiques II

Criteris específics de correcció

Model 3

1. Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat.

2. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts (màxim 40) entre 4.

3. Es valoraran positivament la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

4. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Prova d'accés a la Universitat (2007)

Selectivitat

Matemàtiques II

Solucions

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.

Opció A

1. A cada matriu real $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ li associam el polinomi $p(x) = x^2 - (a+d)x + |A|$, on $|A|$ indica el determinant de A. Direm que p(x) és el polinomi característic de la matriu A. Es demana:

1) Trobar una matriu que tingui com a polinomi característic $p(x) = x^2 + x + 1$. Quantes matrius hi ha amb aquest mateix polinomi característic? (4 punts)
2) Si A té inversa, demostrau que el polinomi característic de la inversa, A^{-1}, és $p(x) = x^2 - \frac{a+d}{|A|}x + \frac{1}{|A|}$ (6 punts)

Solució: La matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ té polinomi característic $x^2 + x + 1$. Hi ha infinites matrius amb aquest polinomi associat.

2. Calculau l'equació de la recta que passa pel punt P = (2, –1,1) i talla perpendicularment la recta

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$$

Solució: La recta és (x,y,z) = (2, –1,1) + t(17,–27, –12)

3. Es considera la funció $y = \frac{(x+1)^2}{e^x}$. Trobau-li els extrems locals i els punts d'inflexió (6 punts). Feu una gràfica aproximada d'aquesta funció (4 punts).

Solució: Max(1,4/e^x), Min(-1,0), PI1 = $(1+\sqrt{2}, \frac{(2+\sqrt{2})^2}{e^{1+\sqrt{2}}})$, *PI2 =* $(1-\sqrt{2}, \frac{(2-\sqrt{2})^2}{e^{1-\sqrt{2}}})$

4. Es consideren les corbes $y = x^2 - 1$ i $y = \sqrt{x+1}$. Trobau l'equació de la recta tangent a la primera corba en el punt de tall amb l'altra, d'abscissa positiva.

Solució: El punt de tall d'abscissa positiva és (Φ, Φ^2-1) *on* Φ *és el nombre d'or,* $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. *L'equació és* $y-(\Phi^2-1) = (1+\sqrt{5})(x-\Phi)$

Opció B

1. Discutiu el sistema següent (6 punts) i resoleu-lo en el cas k = 1 (4 punts)

$x + ky + 2z = 1$
$x + (2k-1)y + 3z = 1$
$x + ky + (k+3)z = 2k-1$

Solució: Si $k \neq \pm 1$, el sistema és compatible determinat. Si k = 1, el sistema és indeterminat i si k = -1, el sistema és incompatible. Per a k = 1 les solucions són de la forma (x,1-x,0)

2. Calculau els punts de la recta $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ que estan a distància 1 del pla $x + y + z = 0$.

Solució: Corresponen als punts de paràmetres $t = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$, $t = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

3. La recta $y = 2x - 1$ és una asímptota obliqua de la funció $f(x) = \frac{2x^2-1}{x+k}$. Trobau el valor de k (7 punts) i, si escau, els extrems locals (3 punts).

Solució: El valor de a és 2, i el de b, 1/2. No té extrems locals.

4. Utilitzant els teoremes de Bolzano i Rolle, demostrau que les corbes $y = \cos x$ i $y = \sqrt{x}$ es tallen en un únic punt.

Solució: La funció $f(x) = \cos x - \sqrt{x}$ *té un zero a l'interval (0,π/2) i la derivada* $f'(x) = -\sin x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ *no s'anul·la en aquest interval.*