Prova d'accés a la Universitat (2007)

Selectivitat

Matemàtiques II

Criteris específics de correcció

Model 1

1. Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat.

2. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts (màxim 40) entre 4.

3. Es valoraran positivament la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

4. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Prova d'accés a la Universitat (2007)

Selectivitat

Matemàtiques II

Solucions

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.

Opció A

1. Discutiu el següent sistema segons els valors del paràmetre k (6 punts) i resoleu-lo quan k = –1 (4 punts)

$x + y + z = k$
$(1+k)x + y + z = 2k$
$x + (1+k)y + z = 1$

Solució: Si $k \neq 0$, el sistema és compatible determinat. Si k = 0, és incompatible. En el cas k = -1, la solució del sistema és (1,-2,0).

2. Es considera el triangle de vèrtexs A = (0,0,1), B = (2,0,0) i C = (1,1,1). Quina és la intersecció dels (tres) plans que passant per cada vèrtex són perpendiculars a la recta determinada pels altres dos vèrtexs?

Solució: La intersecció dels tres plans és la recta (x,y,z) = (1/2,3/2,0) + t(1,-1,2).

3. Demostrau que la corba f(x) = x – 2cos x té un punt d'inflexió a l'interior de l'interval [0 , π] i trobau l'equació de la recta tangent a la corba en aquest punt (7 punts). Feu un dibuix en un entorn del mateix punt (3 punts).

Solució: El punt d'inflexió és (π/2, π/2). L'equació de la recta tangent és y – π/2 = 3(x – π/2). La corba passa de còncava (y''>0) a convexa (y''<0).

4. D'una funció y = f(x) , x > –1, sabem que té per derivada $y' = \frac{a}{1+x}$, on *a* és una constant. Determinau la funció si, a més, sabem f(0) = 1 i f(1) = –1 (6 punts). Feu una gràfica aproximada (4 punts).

Solució: La funció és $y = \frac{-2}{\ln 2}\ln(1+x) + 1$

Opció B

1. Discutiu el rang de la matriu següent segons els valors del paràmetre k

$A = \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k \\ 1 & k^2 & k^2 \end{pmatrix}$ (4 punts). Resoleu el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ en el cas k = –1 (6 punts).

Solució: Si k ≠ 0,1, llavors r = 3. Si k = 0 o k = 1, llavors r = 1. En el cas k = -1, el sistema és compatible determinat, i la solució és $\left(\frac{b+c}{2}, \frac{c-a}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$

2. Siguin les rectes $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ i la determinada per la intersecció dels plans x + y – z = 1, 2x – y + z = 2. Calculau l'equació del pla que passa per l'origen i és paral·lel a les dues rectes (6 punts). Calculau també l'equació de la recta que passa per (1,1,1) i és perpendicular al pla trobat (4 punts).
Solució: El pla és x – 2y – z = 0. La recta és (x,y,z) = (1,1,1) + t(1,-2,-1)

3. L'anul·lació de la primera derivada és una condició necessària perquè una funció (derivable) presenti un extrem local. Aquesta condició, però, no és suficient. Demostrau amb un exemple la segona afirmació (4 punts). En aquest mateix context, què podem dir sobre l'existència d'un punt d'inflexió? (6 punts).
Solució: La funció $y = x^3$ té derivada 0 a x = 0 i no té extrem local a x = 0. L'anul·lació de la segona derivada és una condició necessària perquè una funció (prou derivable) presenti un punt d'inflexió. Aquesta condició, però, no és suficient: la funció $y = x^4$ té derivada segona 0 a x = 0 i no té punt d'inflexió a x = 0.

4.Calculau l'àrea del recinte limitat per la corba y = x – 2sin x i les rectes y = 0, x = – π/3, x = π/3 (7 punts). Feu un dibuix aproximat del recinte (3 punts).
Solució: La funció és imparella i a l'interval [– π/3 , x = π/3] és (estrictament) decreixent. L'àrea és $A = 2\left(1 - \frac{\pi^2}{18}\right) \approx 0.90$.